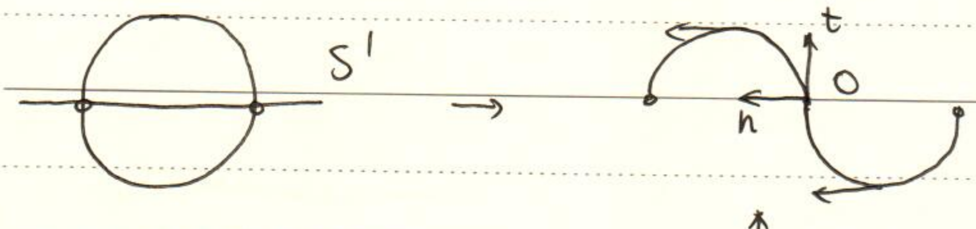
上次课问题：



具有常曲率吗？

(i) 带符号曲率：如选则如上参数增加方向，我们有左上部有曲率 $+1$，而右下部有曲率 -1.

(ii) 点 O 处不光滑（不是 C^2, i.e. 不是二阶连续可微的）

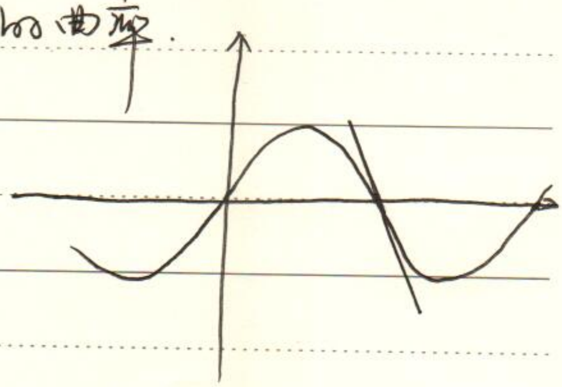
容易看到 O 处切向为 $t=(0,1)$. 但单位法向为 $n=(-1,0)$.

设弧长参数表示为 $r(s)$, $r(0)=0$.

则 $\lim_{s\to 0^-} \ddot{r}(s) = -n$, $\lim_{s\to 0^+} \ddot{r}(s) = n$.

故 $r(s)$ 不是 C^2 的.

例子. 计算曲线 $r(t)=(t, \sin t)$ 的曲率.



首先检查是否为弧长参数：

$r'(t) = (1, \cos t)$

$|r'(t)| = \sqrt{1+\cos^2 t}$

故弧长 $s = \int_0^t \sqrt{1+\cos^2 u}\, du$

$\Longrightarrow \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{1+\cos^2 t}$

我们需要用曲线的弧长参数化表示，仍记为 $r(s)$. 这里可不用显式计算 $r(s)$，而直接计算

$$\underset{\text{切向量}}{\mathbf{t}} = r'(s) = \frac{dr}{dt}\underset{\text{参数 } t}{\frac{dt}{ds}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}(1, \cos t)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,(-\cos t,\ 1)$$

由于 $\dot{\mathbf{t}} = \kappa \mathbf{n}$，我们有

$$\kappa \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt}\,\frac{dt}{ds}$$

注意 $\displaystyle \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,(1,\cos t)\right)$

$$= (1+\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}} \cos t \sin t\,(1,\cos t) + \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,(0,-\sin t)$$

$$= (1+\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}\left(\cos t\sin t,\ \cos^2 t\sin t - \sin t(1+\cos^2 t)\right)$$

$$= (1+\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}\left(\cos t\sin t,\ -\sin t\right)$$

$$= -\sin t\cdot(1+\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}\,(-\cos t,\ 1)$$

故而 $\displaystyle \frac{d\mathbf{t}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = -\sin t\,(1+\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\,(-\cos t,1)}_{=\mathbf{n}}$

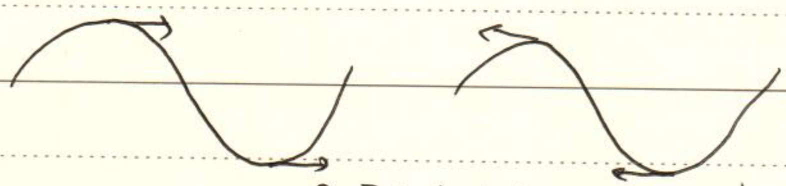
$$= \kappa\mathbf{n}$$

也即 $\kappa(t) = -\sin t\,(1+\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}$. □

回忆我们已留作业请大家检验一般地有

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

关于曲率符号的注记：反向参数增加方向，会改变曲率符号



设 $c:[0,a]\to\mathbb{R}^2$ 弧长参数曲线. 令 $\bar{c}:[0,a]\to\mathbb{R}^2$, $\bar{c}(s)=c(a-s)$

则有 $\bar{\mathbf{t}}(s) = -\mathbf{t}(a-s) \Rightarrow \bar{\mathbf{n}}(s) = -\mathbf{n}(a-s)$

$$\dot{\bar{\mathbf{t}}}(s) = \dot{\mathbf{t}}(a-s) = \kappa(a-s)\,\mathbf{n}(a-s) = \bar{\kappa}(s)\,\bar{\mathbf{n}}(s) \Rightarrow \boxed{\bar{\kappa}(s) = -\kappa(a-s)}$$

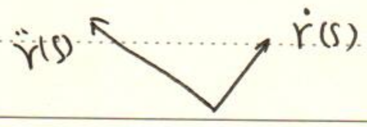
$\boxed{\kappa(s)\text{ 的显式表达式}}$:

给定 $r(s) = (r_1(s), r_2(s))$, $|\kappa(s)| = |\ddot r(s)| = \sqrt{\ddot r_1(s)^2 + \ddot r_2(s)^2}$

注意 $\dot r(s)$ 是单位向量

故 $|\kappa(s)|$ 是 $\dot r(s)$ 和 $\ddot r(s)$

张成平行四边形的面积.



$\kappa(s)$ 实际上是其有向面积 (即 $\{\dot r(s), \ddot r(s)\}$ 与 $\{i, j\}$ 定向相同时, 面积为正, 否则, 面积为负). 故有

$$\kappa(s) = \det\begin{pmatrix}\dot r_1(s) & \ddot r_1(s)\\ \dot r_2(s) & \ddot r_2(s)\end{pmatrix} = (\dot r_1 \ddot r_2 - \ddot r_1 \dot r_2)(s).$$

<u>作业</u>: 设曲线 $r(t) = (x(t), y(t))$. (一般参数!)

证明其曲率为

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2017.09.12

$\boxed{\text{曲率 }\kappa(s)\text{ 的合理性检测}}$

前面已经看到, 我们引入的曲率 $\kappa(s)$ 对直线处处取值为 0, 对圆为处处半径之倒数。那么, 直线、圆是不是唯一满足这种弯曲性质的全曲线呢? (弧长参数)

答案是是的. 给定曲线 $r(s)$, 如果 $\ddot r(s) = 0$, $\forall s$ 我们有 $\dot r(s)$ 是常向量. 积分知 $r(s)$ 必为直线.

如果 $\ddot r(s) = \dot t(s) = a\,n(s)$ 则考虑向量

$$\dot n(s) = -a\,t(s).$$

$$r(s) + \frac{1}{a} n(s)$$

求导知 $\frac{d}{ds}\left(r(s) + \frac{1}{a} n(s)\right) = \dot r(s) + \frac{1}{a}\dot n(s) = \dot r(s) - t(s) = 0.$

故 $r(s)+\frac{1}{a}n(s)$ 为常向量，记为 v_0.

从而 $|r(s)-v_0|^2=\left|\frac{1}{a}\right|^2$ ⇒ r 是以 v_0 为圆心，半径为 $\left|\frac{1}{a}\right|$ 的圆.

实际上我们有如下的一般原则：

定理 2.2. 设 $k:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为连续函数.
则存在弧长参数的曲线 $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$，其 s 处曲率为 $k(s)$，$\forall s\in[a,b]$. 如果存在两条这样的曲线
$$r,\bar{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^2$$
则存在刚体运动（旋转，平移）A 使 $\bar{r}=A\circ r$.

证明：考虑向量值函数 $t:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 以及 $t(s)=(t_1(s),t_2(s))$ 和方程
$$\frac{d}{ds}t=k(s)\left(-t_2(s),t_1(s)\right) \qquad (*)$$
$$\text{or}\quad \frac{d}{ds}\begin{pmatrix}t_1(s)\\ t_2(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -k(s)\\ k(s), & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1(s)\\ t_2(s)\end{pmatrix}$$
由常微分方程理论，此方程存在解 $t(s)=(t_1(s),t_2(s))$
选定 $t(a)$. 注意到：
$$\frac{d}{ds}|t(s)|^2=\left\langle t(s),\frac{d}{ds}t\right\rangle=k(s)\left\langle(t_1,t_2),(-t_2,t_1)\right\rangle =0.$$
知 $t(s)$ 对所有 s 均为单位向量.

解方程
$$\begin{cases}\dfrac{dr}{ds}=t(s)\\ \cancel{\left.\dfrac{dr}{ds}\right|_a=t(a)}\ r(a)=r_0\end{cases}$$
得 $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$.

由于 $t(s)$ 始终为单位向量，故 r 为弧长参数. 且方程 $(*)$ 告诉我们 $\dot{t}(s)=k(s)n(s)$. 故 r 曲率为 s. 这证明了存在性部分.

下证唯一性

设 $r, \bar{r}$ 有相同的曲率函数 κ. 则它们的单位切向量

$t, \bar{t}$ 满足 $\quad \frac{d}{ds}t = \kappa(s)\,(-t_2(s), t_1(s))$

$$\frac{d}{ds}\bar{t} = \kappa(s)\,(-\bar{t}_2(s), \bar{t}_1(s)).$$

注意到如果 t 是上述方程的一个解，则对任一旋转 B，$B \circ t$ 仍是一个解。（原因：矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix} = \kappa(s)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{是旋转}}$

故 B 和 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 可交换）.

一般地，$t(a)$ 和 $\bar{t}(a)$ 可不相同. 选择旋转 B 使得

$$B(t(a)) = \bar{t}(a).$$

则 $\quad B \circ t$ 和 $\bar{t}$ 满足带相同初值的同一常微分方程，由解的唯一性知 $\quad B \circ t(s) = \bar{t}(s),\ \forall s.$

这说明 $\bar{c}$ 和 $B \circ c$ 只差一个平移. □

注记：上述证明我们所用常微分方程理论是 Picard - Lindelöf 定理：

方程 $\begin{cases} \frac{d\vec{\alpha}}{dt}(t) = f(t, \vec{\alpha}(t)) \\ \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\alpha}_0 \end{cases}$ 如果 f 对 $\vec{\alpha}$ 一致 Lipschitz 连续，关于 t 连续.

则存在 $\varepsilon > 0$，方程在 $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ 上存在唯一解.

若对线性方程 $\begin{cases} \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} = A(t)\vec{\alpha}(t) \\ \vec{\alpha}(t_0) = \vec{\alpha}_0 \end{cases} \quad t \in [a, b]$ 如果 $A(t)$ 是连续的矩阵值函数 $t \in [a, b]$.

则存在唯一解在整个区间 (a, b) 上!!

§3. E^3 的曲线

现在我们把关于平面正则曲线的讨论推到空间正则曲线:

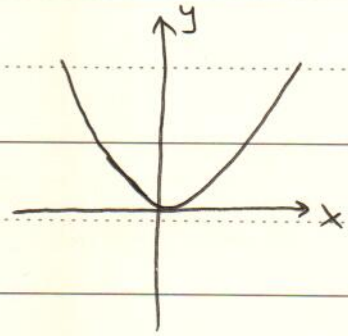
考虑 $r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in E^3$, $t \in (a,b)$

正则: r C^∞; $\frac{dr}{dt}(t) \neq 0$.

弧长参数 $s = \int_a^t |r'(u)|\, du$.

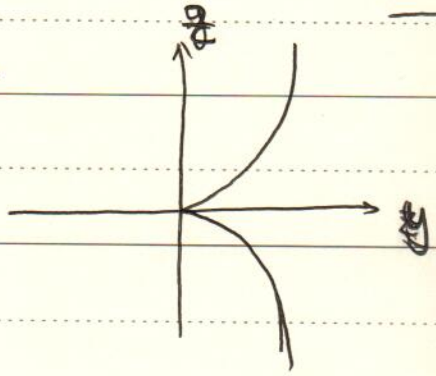
例子. (Twisted Cubic)

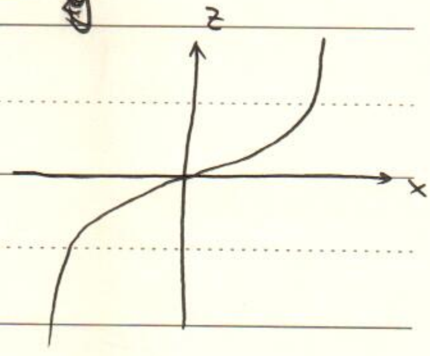
$$r(t) = (t, t^2, t^3)$$



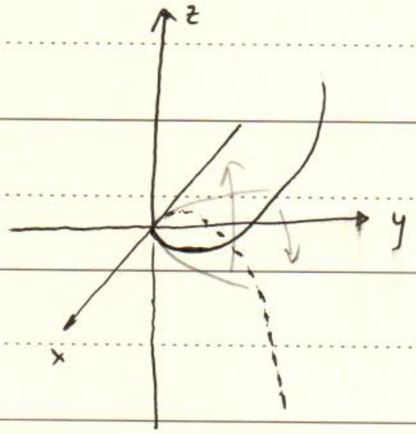
x-y 平面投影 $y=x^2$

y-z 平面投影 $y^3=z^2$





x-z 平面投影 $z=x^3$



观察: $\dot{r}(0) = (1,0,0)$, $\ddot{r}(0) = (0,2,0)$ 张成 x-y 平面

在其上投影有平面曲率

同时曲线又有"离开 x-y 平面的一种弯曲".

密切圆、密切平面

给定弧长参数曲线 $r(\cdot):[a,b]\to\mathbb{R}^3$，$r=r(s)$

~~设有~~考虑三点 $r(s_1)$, $r(s_2)$, $r(s_3)$，设 $s_i\to s$ 时，三点不共线

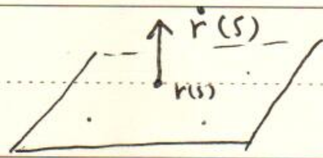
则三点确定一个圆（先确定一个平面，再确定平面上一圆），其圆心记为 $C(s_1,s_2,s_3)$

如果 $C(s_1,s_2,s_3)\longrightarrow C$ as $s_i\to s$，和平面曲线情形同样地计算给出

$$(*)\quad\begin{cases}\langle \dot r(s),\ r(s)-C\rangle=0\\ \langle \ddot r(s),\ r(s)-C\rangle=-\langle \dot r(s),\dot r(s)\rangle=-1\end{cases}$$

但此时，上述方程不能确定 C 了：

第一个方程告诉我们 C 可在与 $\dot r(s)$ 垂直的平面上任何一点。



为了能确定 C，我们需要把它"限定在一个平面上"。

定理3.1 设 $r:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ 是一条弧长参数的正则曲线满足

$$\ddot r(s)\neq 0.$$

则(i)当 s_1,s_2,s_3 充分靠近 s 时，$r(s_1),r(s_2),r(s_3)$ 不共线.

(ii)且当 $s_i\to s$ 时，由 $r(s_1),r(s_2),r(s_3)$ 唯一确定的平面收敛到过 $r(s)$ 点由 $\dot r(s)$ 和 $\ddot r(s)$ 张成的平面 P.

证明：先假定(i)成立. 记 $P(s_1,s_2,s_3)$ 为 $r(s_1)$, $r(s_2)$, $r(s_3)$ 确定的平面. 这个平面可以由其一个单位法向量 $\vec a(s_1,s_2,s_3)$ 表示.

考虑函数 $s\longmapsto\langle r(s),\ \vec a(s_1,s_2,s_3)\rangle$ 在 s_1,s_2,s_3 处均取值 0.

故由中值定理有
$$\begin{cases}\langle \dot r(\xi_i),\ \vec a(s_1,s_2,s_3)\rangle=0, & \xi_i\in(s_i,s_{i+1}),\ i=1,2\\ \langle \ddot r(\eta),\ \vec a(s_1,s_2,s_3)\rangle=0, & \eta\in(\xi_1,\xi_2).\end{cases}$$

设 $\dot r(\xi_1)$, $\ddot r(\eta)$, $\vec a$ 成右手系

注意到方程 $\langle \dot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0$

$\langle \ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0$

当 $\ddot{r}(s) \neq 0$ 时 唯一确定 $\vec{a}$ 使 $\{\dot{r}(s), \ddot{r}(s), \vec{a}\}$ 成右手系

换言之，考虑方程

$$\begin{cases} \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle = 0 \\ \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle = 0 \\ \langle \dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle = |\dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta)| \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\begin{cases} \langle \dot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \dot{r}(s) \wedge \ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 1 \end{cases} \quad (2)$$

则 (1) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a} \rangle + \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a} \rangle + \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a} \rangle + \langle \dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle = 0 \end{cases}$$

Letting $s_i \to s$，由(2)，$\langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a} \rangle \to 0$，$\langle \ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle \to 0$，

$\langle \dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle \to \langle \dot{r}(s) \wedge \ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 1$.

故有

$$\lim_{s_i \to s} \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a} \rangle = 0$$

$$\lim_{s_i \to s} \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a} \rangle = 0$$

$$\lim_{s_i \to s} \langle \dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a} \rangle = \lim_{s_i \to s} |\dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta)| - 1 = 0.$$

因为当 $s_i \to s$ 时，$\det \begin{pmatrix} \dot{r}(\xi_1) \\ \ddot{r}(\eta) \\ \dot{r}(\xi_1) \wedge \ddot{r}(\eta) \end{pmatrix} \neq 0$. 解线性方程，我们有

$$\lim_{s_i \to s} (\vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a}) = 0.$$

从而 $\cancel{\vec{a}(s_1,s_2,s_3)}$ $P(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到平面 P.

如 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 共线 l 则我们可以选 $\vec{a}(s_1,s_2,s_3)$ 为垂直于 l 过 $r(s)$ 之平面内任一单位向量. 都有 $s \mapsto \langle r(s), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle$ 在 s_i 处取0.

从而上面的论证仍成立，所有这些 $\vec{a}(s_1,s_2,s_3)$ 都收敛到 $\vec{a}$，得证 □

由 $\dot{r}(s)$，$\ddot{r}(s)$ 张成的平面 P 称为曲线 r 在 s 处的<u>密切平面</u>
(osculating plane)
kissing

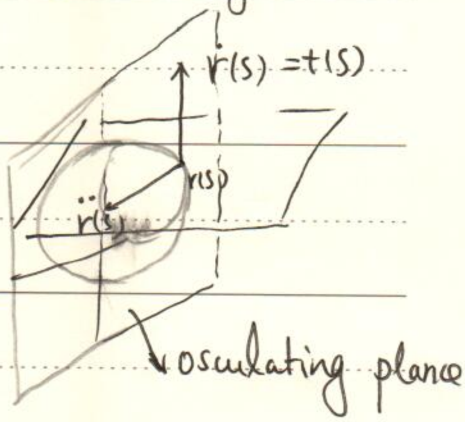
这样我们知道，对曲线 r，$\ddot{r}(s)\neq 0$，(※) on p.35 的解 C 有另外一个限制，即 C 在 $\dot{r}(s)$ 和 $\ddot{r}(s)$ 张成的密切平面中。这样 C 就被唯一确定了。从而类似的讨论，可知 $C(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到 C，也即 $r(s)$ 处有<u>密切圆</u> (osculating circle).

我们定义曲率 k 为密切圆半径的倒数，因此有

$$K(s) = |\ddot{r}(s)| = |\dot{t}(s)|,$$

where $t(s) := \dot{r}(s)$ is the <u>tangent</u> vector.

当然，当 $\ddot{r}(s)=0$ 时，$K(s):=0$.



但这时我们可有很多 $t(s)$ 的法向的选择，(平面时，限定右手系，我们有唯一选择) 因此我们这时没有"带符号曲率"的定义.

当 $\ddot{r}(s)\neq 0$，也即 $k(s)\neq 0$ 时，我们可把 $\ddot{r}(s)$ 单位化，记为 $n(s)$
从而有

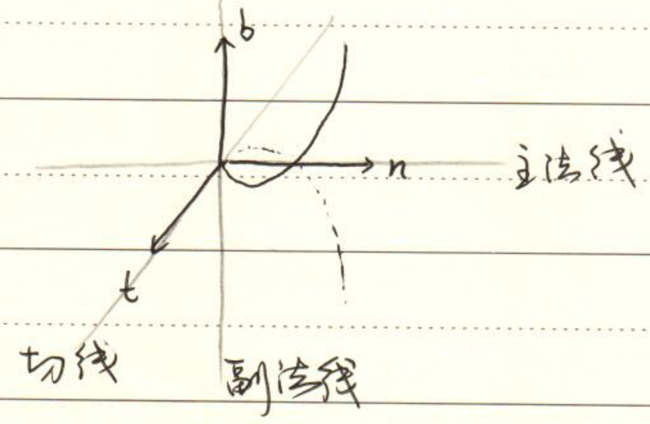
$$\dot{t}(s) = k(s)\, n(s).$$

向量 $n(s)$ 称为<u>主法向量</u> (principal normal of r at s)
注意当 $\ddot{r}(s)=0$ 时，主法向量无法确定.
当 $\ddot{r}(s)\neq 0$，也即 $k(s)\neq 0$ 时，我们还可定义

$$b(s) := t(s) \wedge n(s).$$

称 $b(s)$ 为副法向量 (binormal of r at s).

这样，沿曲线 r 我们就有一个正交标架 $\{r(s);\ t(s), n(s), b(s)\}$
称为曲线的 Frenet 标架，它与 $\{i, j, k\}$ 同定.



$t-n$ 平面：密切平面
osculating plane

$b-n$ 平面. 法平面
normal plane

$t-b$ 平面 从切平面.
rectifying plane

normal plane 的命名是自然的，它由与 t 垂直的向量构成.
rectifying plane: rectify 是矫正改正的意思. 这个命名的原因是考虑每点 s 处的该平面，这些平面"包络"出一个曲面，而曲线 $r(s)$ 恰好是这个曲面的测地线("直线"). rectify 这里可理解为是把曲线"拉直"了.

Frenet 标架运动方程：空间曲线的第二种弯曲

由前面的例子，我们已经看到，曲率 $k(s)$ 只描述了曲线在密切平面上描写了曲线在该点处的弯曲，我们还需要进一步的量来描述空间曲线的弯曲. 如何来找它呢?

回忆在平面曲线情形，我们讨论过 Frenet 标架的变化可反映曲线的弯曲。这里我们就来看一下空间曲线的 Frenet 标架的运动方程.

假定 $\ddot{r}(s) \neq 0$，即 $k(s) > 0$.