补

上次课关于平面曲线基本定理存在性部分证明~~我~~没有提到关键一步：

$\boxed{\text{设} K:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ 为连续函数，则存在弧长参数的曲线 } r:[a,b]\to\mathbb{R}^2\text{，其 } s \text{ 处曲率为 } K(s)\text{，}\forall s\in[a,b]}$

证明：解常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K(s) \\ K(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s)\end{pmatrix} \\ t(s) \text{ with initial value } \begin{pmatrix} t_1(a) \\ t_2(a)\end{pmatrix} \text{ (unit vector)} \end{cases}$$

得向量函数 $t:[a,b]\to\mathbb{R}^2$

然后积分得曲线 $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ s.t. $\begin{cases} \dfrac{dr}{ds} = t(s) \\ r(a) = r_0. \end{cases}$

这里需要说明 $r=r(s)$ 为弧长参数，亦即要说明 $t(s)$ 对任何 s 均为单位向量，这是因为

$$\frac{d}{ds}|t(s)|^2 = 2\langle t(s), \tfrac{d}{ds}t\rangle = 2K(s)\langle t(s), (-t_2, t_1)\rangle = 0.$$

故 $|t(a)|=1 \Rightarrow |t(s)|=1, \forall s.$

从而由于 r 为弧长参数，我们有 $\underset{\dot{t}(s)}{\overset{}{\ddot{r}(s)}} = K(s)\,n(s)$

$\Rightarrow r$ 曲率为 $K(s)$. □

密切圆、密切平面

给定弧长参数曲线 $r(s):[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $r=r(s)$

考虑三点 $r(s_1)$, $r(s_2)$, $r(s_3)$，设 $s_i\to s$ 时，三点不共线

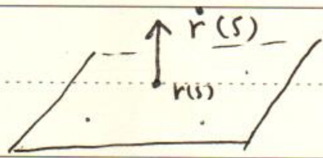
则三点确定一个圆（先确定一个平面，再确定平面上一圆），其圆心记为 $C(s_1,s_2,s_3)$

如果 $C(s_1,s_2,s_3)\longrightarrow C$ as $s_i\to s$，和平面曲线情形同样地计算给出

$$(*)\begin{cases}\langle \dot r(s),\ r(s)-C\rangle=0\\ \langle \ddot r(s),\ r(s)-C\rangle=-\langle \dot r(s),\dot r(s)\rangle=-1\end{cases}$$

但此时，上述方程不能确定 C 了：

第一个方程告诉我们 C 可在与 $\dot r(s)$ 垂直的平面上任何一点.



为了能确定 C，我们需要把它"限定在一个平面上".

定理3.1 设 $r:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ 是一条弧长参数的正则曲线满足

$$\ddot r(s)\neq 0.$$

则(i)当 s_1,s_2,s_3 充分靠近 s 时，$r(s_1)$, $r(s_2)$, $r(s_3)$ 不共线.

(ii)且当 $s_i\to s$ 时，由 $r(s_1)$, $r(s_2)$, $r(s_3)$ 唯一确定的平面收敛到过 $r(s)$ 点由 $\dot r(s)$ 和 $\ddot r(s)$ 张成的平面 P.

证明：先假定(i)成立. 记 $P(s_1,s_2,s_3)$ 为 $r(s_1)$, $r(s_2)$, $r(s_3)$ 确定的平面. 这个平面可以由其一个单位法向量 $\vec a(s_1,s_2,s_3)$ 表示.

考虑函数 $s\longmapsto\langle r(s)-p,\ \vec a(s_1,s_2,s_3)\rangle$

在 s_1, s_2, s_3 处均取值 0.　p 为 $P(s_1,s_2,s_3)$ 一给定点

故由中值定理有

$$\begin{cases}\langle \dot r(\xi_i),\ \vec a(s_1,s_2,s_3)\rangle=0, & \xi_i\in(s_i,s_{i+1}),\ i=1,2\\ \langle \ddot r(\eta),\ \vec a(s_1,s_2,s_3)\rangle=0, & \eta\in(\xi_1,\xi_2)\end{cases}$$

设 $\dot r(\xi_1)$, $\ddot r(\eta)$, 成右手系

注意到方程 $\langle \dot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0$

$\langle \ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0$

当 $\dot{r}(s) \neq 0$ 时 唯一确定 $\vec{a}$ 使 $\{\dot{r}(s), \ddot{r}(s), \vec{a}\}$ 成右手系

换言之，考虑方程

$$\begin{cases} \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle = 0 \\ \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle = 0 \\ \langle \dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle = |\dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta)| \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\begin{cases} \langle \dot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \dot{r}(s)\wedge\ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 1 \end{cases} \quad (2)$$

下面要说明 $\vec{a}(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到 $\vec{a}$.

则 (1) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a}(s_1,s_2,s_3)-\vec{a} \rangle + \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3)-\vec{a} \rangle + \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle = 0 \\ \langle \dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3)-\vec{a} \rangle + \langle \dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle = 0 \end{cases}$$

Letting $s_i \to s$, 由(2), $\langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a} \rangle \to 0$, $\langle \ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle \to 0$,

$\langle \dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta), \vec{a} \rangle \to \langle \dot{r}(s)\wedge\ddot{r}(s), \vec{a} \rangle = 1$.

故有

$$\lim_{s_i\to s} \langle \dot{r}(\xi_1), \vec{a}(s_1,s_2,s_3)-\vec{a} \rangle = 0$$

$$\lim_{s_i\to s} \langle \ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3)-\vec{a} \rangle = 0$$

$$\lim_{s_i\to s} \langle \dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta), \vec{a}(s_1,s_2,s_3)-\vec{a} \rangle = \lim_{s_i\to s} |\dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta)| - 1 = 0.$$

因为当 $s_i \to s$ 时，$\det \begin{pmatrix} \dot{r}(\xi_1) \\ \ddot{r}(\eta) \\ \dot{r}(\xi_1)\wedge\ddot{r}(\eta) \end{pmatrix} \neq 0$. 解线性方程，我们有

$$\lim_{s_i\to s} (\vec{a}(s_1,s_2,s_3) - \vec{a}) = 0.$$

从而 $\cancel{\vec{a}(s_1,s_2,s_3)}$ $P(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到平面 P.

如 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 共线 l 则我们可以选 $\vec{a}(s_1,s_2,s_3)$ 为垂直于 l 过 $r(s)$ 之平面内任一单位向量. 都有 $s \mapsto \langle r(s), \vec{a}(s_1,s_2,s_3) \rangle$ 在 s_i 处取 0. $P \cap l$ 的交点

从而上面的论证仍成立，所有这些 $\vec{a}(s_1,s_2,s_3)$ 都收敛到 $\vec{a}$，□

(即当 s_i 充分靠近 s 时，所有 $\vec{a}(s_1,s_2,s_3)$ 都接近与 P 垂直)

由 $\dot{r}(s)$，$\ddot{r}(s)$ 张成的平面 P 称为曲线 r 在 s 处的密切平面 (osculating plane)

kissing

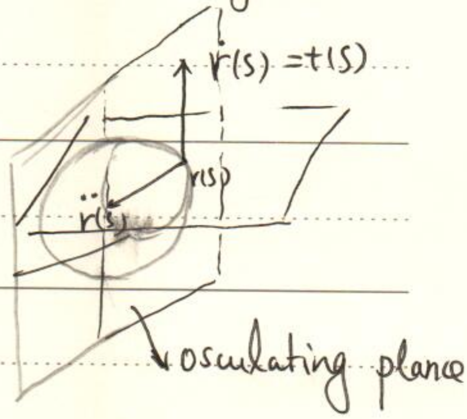
这样我们知道，对曲线 r，$\ddot{r}(s)\neq 0$，(※) on p.35 的解 C 有另外一个限制，即 C 在 $\dot{r}(s)$ 和 $\ddot{r}(s)$ 张成的密切平面中。这样 C 就被唯一确定了。从前面我们的讨论，可知 $C(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到 C，□ 也即 $r(s)$ 处有密切圆 (osculating circle)。

我们定义曲率 k 为密切圆半径的倒数，因此有

$$K(s) = |\ddot{r}(s)| = |\dot{t}(s)|, \quad \text{where } t(s) := \dot{r}(s)$$

is the tangent vector.

当然，当 $\ddot{r}(s)=0$ 时，$K(s) := 0$



但这时我们可有很多 $t(s)$ 的法向的选择，(平面时，因限定右手系，我们有唯一选择) 因此我们这时没有"带符号曲率"的定义。

当 $\ddot{r}(s)\neq 0$，也即 $k(s)\neq 0$ 时，我们可把 $\ddot{r}(s)$ 单位化，记为 $n(s)$

从而有 $\quad \dot{t}(s) = k(s)\, n(s)$.

向量 $n(s)$ 称为主法向量 (principal normal of r at s)

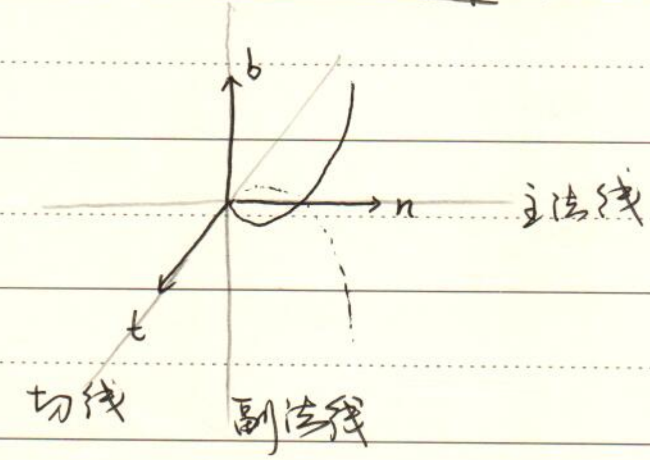
注意当 $\ddot{r}(s)=0$ 时，主法向量无法确定。

当 $\ddot{r}(s)\neq 0$，也即 $k(s)\neq 0$ 时，我们还可定义

$$b(s) := t(s) \wedge n(s).$$

称 $b(s)$ 为副法向量 (binormal of r at s).

这样, 沿曲线 r 我们就有一个正交标架 $\{r(s);\ t(s), n(s), b(s)\}$ 称为曲线的 Frenet 标架, 它与 $\{i,j,k\}$ 同定.



$t-n$ 平面: 密切平面 osculating plane

$b-n$ 平面. 法平面 normal plane

$t-b$ 平面 ~~[illegible]~~ 从切平面 rectifying plane.

normal plane 的命名是自然的, 它由 ~~[illegible]~~ 与 t 垂直的向量构成.

rectifying plane: rectify 是矫正改正的意思. 这个命名的原因是考虑每点 s 处的该平面, 这些平面"包络"出一个曲面, 而曲线 $r(s)$ 恰好是这个曲面的测地线("直线"). rectify 这里可理解为是把曲线"拉直"了.

Frenet 标架运动方程: 空间曲线的第二种弯曲

由前面的例子, 我们已经看到, 曲率 $k(s)$ 只描述了曲线在密切平面上投影曲线在该点处的弯曲, 我们还需要进一步的量来描述空间曲线的弯曲. 如何来找它呢?

回忆在平面曲线情形, 我们讨论过 Frenet 标架的变化可反映曲线的弯曲。这里我们就来看一下空间曲线的 Frenet 标架的运动方程.

假定 $\ddot{r}(s)\neq 0$. 即 $k(s)>0$.

我们已经有 $\dot{t}(s)=k(s)n(s)$.

注意到 $\langle b,b\rangle=1 \Rightarrow \langle\dot{b}(s),b(s)\rangle=0$

故 $\dot{b}(s)$ 是 $t(s)$ 和 $n(s)$ 的线性组合

$$\langle b,t\rangle=0 \Rightarrow \langle\dot{b}(s),t(s)\rangle=-\langle b(s),\dot{t}(s)\rangle$$
$$=-k(s)\langle b(s),n(s)\rangle$$
$$=0$$

所以 $\dot{b}$ 是形如 λn

这就出现了一个新的量. 我们定义 $\tau=-\lambda$ 也即

$$\dot{b}(s)=-\tau(s)n(s)$$

$\tau(s)$ 称为曲线在 s 处的挠率 (torsion). 这个量的意义我们将稍后进一步讨论。它有时也称为空间曲线的 second curvature.

再来考查 $\dot{n}(s)$.

$\langle n,n\rangle=1 \Rightarrow \langle\dot{n},n\rangle=0$ 即 $\dot{n}(s)$ 是 $t(s)$ 和 $b(s)$ 的线性组合.

从 $\langle n,t\rangle=0 \Rightarrow \langle\dot{n},t\rangle=-\langle n,\dot{t}\rangle$
$$=-k(s)$$

$$\langle n,b\rangle=0 \Rightarrow \langle\dot{n},b\rangle=-\langle\dot{b},n\rangle=\tau(s)$$

故有:

$$\dot{n}(s)=-k(s)t(s)+\tau(s)b(s).$$

总结起来,

$$\begin{cases}\dot{t}(s)= & k(s)n(s) & \\ \dot{n}(s)=-k(s)t(s) & & +\tau(s)b(s)\\ \dot{b}(s)= & -\tau(s)n(s). & \end{cases}$$

or

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\-k&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}$$

这就是 $\boxed{\text{Serret - Frenet 公式}}$

1851 1847/1852.

$\boxed{挠率}$ ~~的意义~~ 的几何意义.

$\boxed{显式计算公式}$：由 $\dot{b}(s) = -\tau(s)\,n(s)$ 知

$$\tau(s) = -\langle n(s), \dot{b}(s)\rangle$$
$$= \langle -n(s), (t(s)\wedge n(s))^{\cdot}\rangle$$
$$= \langle -n(s), \dot{t}(s)\wedge n(s)\rangle + \langle -n(s), t(s)\wedge \dot{n}(s)\rangle$$
$$= \langle -n(s), k(s)\,n(s)\wedge n(s)\rangle + \langle -n(s), t(s)\wedge(-kt+\tau b)\rangle$$
$$= \langle -n(s), \tau(s)\,t(s)\wedge b(s)\rangle$$
$$= \tau(s)\,\langle -n(s), t(s)\wedge b(s)\rangle$$

这样计算什么也得不到 ☹

重新算 $\tau(s) = \langle -n(s), t(s)\wedge \dot{n}(s)\rangle$

$$= \left\langle -\frac{\ddot{r}(s)}{k(s)}, \dot{r}(s)\wedge\left(\frac{\ddot{r}(s)}{k(s)}\right)^{\cdot}\right\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{\ddot{r}(s)}{k(s)}, \dot{r}(s)\wedge\frac{k(s)\dddot{r}(s)-\ddot{r}(s)\dot{k}(s)}{k^2(s)}\right\rangle$$

$$= -\frac{1}{k^2(s)}\langle \ddot{r}(s), \dot{r}(s)\wedge\dddot{r}(s)\rangle \quad (\text{而}\ \langle \ddot{r}, \dot{r}\wedge\ddot{r}\rangle = 0)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\tau(s) = \frac{1}{k^2(s)}\langle \dot{r}(s)\wedge\ddot{r}(s), \dddot{r}(s)\rangle}$$

作业：证明 E^3 的正则曲线 $r(t)$ 的曲率和挠率分别为

$$k(t) = \frac{|r'(t)\wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(r', r'', r''')}{|r'\wedge r''|^2}.$$

注意：挠率只可定义在 $r''\neq 0$ 的点，曲率只能定义在 $r'\neq 0$ 的点!!

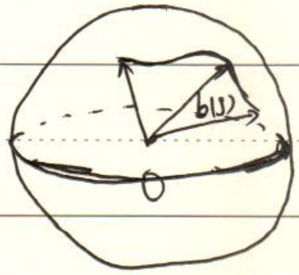
$\boxed{几何意义}$ ①绝对值 $|\tau|$ 的几何意义.

从 $\dot{b}(s) = -\tau(s)\,n(s)$ 出发，$|\dot{b}(s)| = |\tau(s)|$

向量模长　　绝对值

考虑 $b:[a,b]\to S^2$

是一条空间曲线.



b在$[a,s]$的弧长

$$=\int_a^s |b'(u)|\,du = \int_a^s |\tau(u)|\,du$$

所以 $|\tau(s)|$ 是弧长函数的导数.

由于 $b(s)$ 与 s处密切平面垂直，曲线 b 弧长的导数可以看作是密切平面随参数 s 的变化速率

$|\tau|$ "测量了"曲线离开"平面"的速率

(回忆: 平面曲率 $|\kappa|$ "测量了"平面曲线离开"直线"的速率

$|\kappa|\equiv 0 \Rightarrow$ 平面曲线是直线)

定理3.2: 设空间正则曲线 r 的曲率 $\kappa>0$，则 r 落在某个平面上的充要条件是 $\tau\equiv 0$.

证明: ($\Rightarrow$) 如果 r 落在平面 P 上，设 a 是 P 的单位法向量。

则 r 满足:

$$\langle r(s)-r(s_0),\, a\rangle = 0, \quad \text{对某一固定 } s_0.$$

求导 $\Rightarrow \langle \dot r(s), a\rangle = \langle t(s), a(s)\rangle = 0$.

再求导 $\Rightarrow \langle \kappa n, a\rangle = 0 \Rightarrow \langle n, a\rangle = 0$ since $\kappa>0$.

再再求导 $\Rightarrow \langle -\kappa t+\tau b, a\rangle = 0 \xRightarrow{\langle t,a\rangle=0} \tau\langle b,a\rangle = 0$

注意 a 垂直于 t 和 n, i.e. b 和 a 平行 $\Rightarrow$ b是常向量.

$\Rightarrow \tau\equiv 0$.

($\Leftarrow$) 若 $\tau\equiv 0$, 则 $\dot b(s) = -\tau(s)n(s) = 0$ 即 b 是常向量

$\frac{d}{ds}\langle r,b\rangle = \langle \dot r(s), b\rangle = \langle t, b\rangle = 0$ s.t. $\langle v,b\rangle = \langle r,b\rangle$

故 $\langle r,b\rangle$ 是常数. 因此 r ~~落在一个平~~ $\exists v$ s.t. $\langle r-v, b\rangle = 0$

因此 r 落在一个平面上 $\square$

2017.09.18

② τ 的符号的几何意义

回忆 τ 的计算式

$$\tau = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \wedge r''|^2} = \frac{\langle r', r'' \wedge r''' \rangle}{\langle r' \wedge r'', r' \wedge r'' \rangle}$$

由此公式，我们立即有 曲线 $r: [0,a] \to \mathbb{R}$

和 $\bar{r}: [0,a] \to \mathbb{R}$

$\bar{r}(s) := r(a-s)$

有 $\bar{\tau}(s) = \tau(a-s)$. 改变参数的方向，并不改变挠率的符号

(原因：改变参数方向时，b 的方向变了！)

(t 变反向，n 不变)

考察曲线在一点 $r(s_0)$ 的渐近展开：不妨取 $s_0 = 0$. 我们有

$$r(s) = r(0) + s\dot{r}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{r}(0) + \frac{s^3}{6}\dddot{r}(0) + \varepsilon(s).$$

高阶无穷小量.

运用 Serret - Frenet 公式，我们有

$$\dot{r}(0) = t(0).$$

$$\ddot{r}(0) = \dot{t}(0) = k(0)n(0)$$

$$\dddot{r}(0) = \frac{d}{ds}(kn)(0) = (\dot{k}n + k\dot{n})(0) = (\dot{k}n - k^2 t + k\tau b)(0).$$

代入展开式重新整理，有

$$r(s) = r(0) + s\,t(0) + \frac{s^2}{2}k(0)\,n(0) + \frac{s^3}{6}\big(\dot{k}(0)\,n(0) - k^2(0)\,t(0) + k(0)\,\tau(0)\,b(0)\big) + \varepsilon(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} r(s) = r(0) &+ \left(s - \frac{k(0)^2}{6}s^3\right) t(0) \\ &+ \left(\frac{k(0)}{2}s^2 + \frac{\dot{k}(0)}{6}s^3\right) n(0) \\ &+ \frac{k(0)\tau(0)}{6}s^3 \cdot b(0) + \varepsilon(s). \end{aligned}}$$

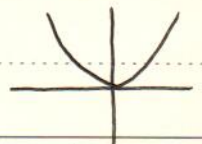
在 $r(0)$ 处，就取 Frenet 标架 $\{r(0); t(0), n(0), b(0)\}$ 为 E^3 的坐标架 $\{O; i, j, k\}$. 则 $r(s)$ 的坐标表示为

$$r(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

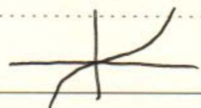
$$\begin{cases} x(s) = s - \dfrac{k(0)^2}{6} s^3 + \varepsilon_x \\ y(s) = \dfrac{k(0)}{2} s^2 + \dfrac{\dot{k}(0)}{6} s^3 + \varepsilon_y \\ z(s) = \dfrac{k(0)\tau(0)}{6} s^3 + \varepsilon_z \end{cases}, \text{ where } \varepsilon_s = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z).$$

因 s 充分小时，在各个平面的投影：

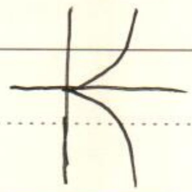
(1) $y = \dfrac{k(0)}{2} x^2$ up to order 2 on the osculating plane

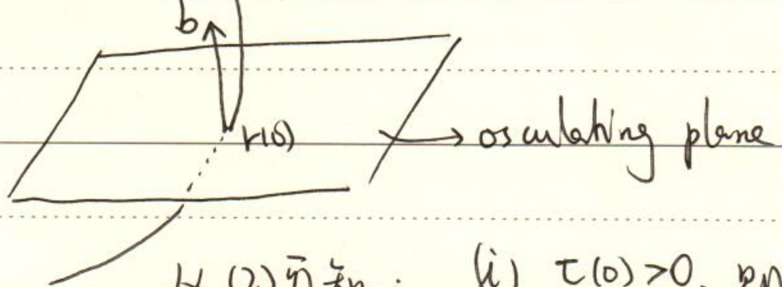


(2) $z = \dfrac{k(0)\tau(0)}{6} x^3$ up to order 3 on the rectifying plane



(3) $z^2 = \dfrac{2}{9} \dfrac{\tau^2}{k} y^3$ up to order 3 on the normal plane





以(2)可知：(i) $\tau(0) > 0$，则点 $r(h)$, $h > 0$ 和 $b(s)$ 在密切平面的同一边（因为此时 $z = \dfrac{k(0)\tau(0)}{6} h^3 > 0$）

(ii) $\tau(0) < 0$，则点 $r(h)$, $h > 0$ 和 $b(s)$ 在密切平面的不同侧（因为此时 $z = \dfrac{k(0)\tau(0)}{6} h^3 < 0$）

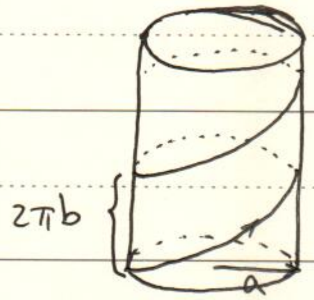
也即 $\tau(0)>0 \Rightarrow$ r 沿正向（与 b 同向）穿过 $r(0)$ 点的密切平面

$\tau(0)<0 \Rightarrow$ r 沿反向（与 b 反向）穿过 $r(0)$ 点的密切平面

另个应用：$\gamma(s)$ 表达式 $\Rightarrow$ 存在 $s=0$ 的邻域 J s.t. $r(J)$ 全部在主法向 n 指向的从切平面的一侧

例子：圆柱螺旋线 $r(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ ~~$(a>0)$~~

求其曲率和挠率.



计算：首先重新弧长参数化曲线：

$$s=\int_0^t |r'(u)|\,du$$

$$=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,du=\sqrt{a^2+b^2}\,t$$

$\Rightarrow t=\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 为方便起见,我们记 $c:=\sqrt{a^2+b^2}$

则有 $t=\dfrac{s}{c}$

从而曲线的弧长参数表示为

$$r(s)=\left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ b\frac{s}{c}\right).$$

从而
$$t(s)=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right).$$

$$\dot{t}(s)=\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$k(s)=|\dot{t}(s)|=\frac{|a|}{c^2}.$$

$$n(s)=\frac{\dot{t}(s)}{k(s)}=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$b(s)=t(s)\wedge n(s)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c} & \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos\frac{s}{c} & -\sin\frac{s}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right)$$

$$\dot b(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

$$= -\frac{b}{c^2}\eta(s).$$

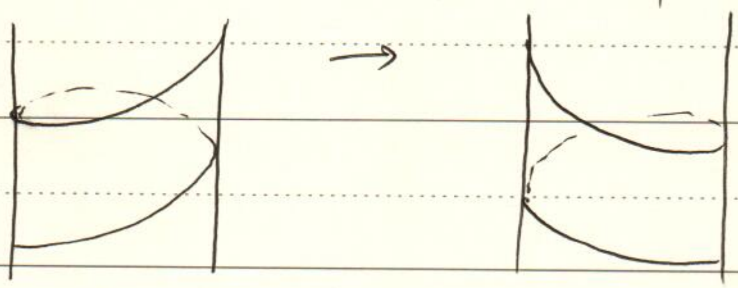
所以，$\kappa(s) = \dfrac{|a|}{a^2+b^2}$，$\tau(s) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$. □

考查：(i) 变 a 的符号：$a \longrightarrow -a$. 曲率、挠率均不变

$$(a\cos t,\ a\sin t,\ bt) \cdot \left(-a\underbrace{\cos(\pi+t)}_{-\cos t},\ -a\underbrace{\sin(\pi+t)}_{-\sin t},\ b(\pi+t)\right)$$

① 两条螺旋曲线只差一个旋转（角度 π）.

(ii) 变 b 的符号 曲率不变，挠率反号



$b \longmapsto -b$

(iii) 给定任何常数对 (κ,τ)，$\kappa>0$，均可找到适当的 a, b 使 $\dfrac{|a|}{a^2+b^2}=\kappa$，$\dfrac{b}{a^2+b^2}=\tau$.

即均可找到圆柱螺旋线使其曲率、挠率分别为 (κ,τ).

自然地问题：圆柱螺旋线是唯一具有常曲率 $\kappa>0$ 和常挠率 τ 的曲线吗？