§4 曲线论基本定理

前面我们讨论了空间曲线的曲率和挠率。在讨论它们的时候，我们借助了两个工具：①标架（坐标）②参数化。这里我们要强调的是，曲率、挠率这两个量是并不依赖于这些工具的选取的。换言之，曲率、挠率是由曲线自身决定的。这种量才是我们要研究的。

首先给定正则标架，设同一条曲线有两种不同的参数化 $r(t)$，$r(u)$（注意我们有 $\frac{dt}{du}\neq 0$）。

~~对 r(t)~~ 如果 $\frac{dt}{du}>0$，则对 $r(t)$ 和 $r(u)$ 分别弧长参数化得到的弧长参数至多差一个常数（这是因为 t，u 参数增加方向相同，而相同的方向的参数使切向量长度为1的参数"至多差一个常数"）。由曲率、挠率计算公式知，这不改变曲率、挠率。

如果 $\frac{dt}{du}<0$ 则对 $r(t)$ 和 $r(u)$ 分别弧长参数化得到的弧长参数差一个常数和一个符号。由计算公式知，这也不改变曲率、挠率。

其次，如果给定不同但定向相同的正则标架，这时曲线的相对坐标系差一个刚体运动。这也不改变曲率、挠率。

性质4.1 曲线的弧长、曲率和挠率在刚体运动下不变。

证明：设 T 是一个刚体运动，即 $T(P)=PT+P_0$，$T\in O(3)$，$P_0\in E_3$，$\det T=1$。

设 $r=r(s)$ 是一条弧长参数正则曲线，$\tilde{r}(s):=T\circ r$。

考虑切向量 $\tilde{t}(s) = \frac{d}{ds}\tilde{r} = \frac{dr}{ds}T = t(s)T$.

因为 $|\tilde{t}(s)| = |t(s)T| = |t(s)|$，弧长保持不变.

又注意到 $\underset{\tilde{k}(s)\tilde{n}(s)}{\underset{\parallel}{\frac{d\tilde{t}}{ds}}} = \underset{k(s)n(s)T}{\underset{\parallel}{\frac{dt}{ds}T}}$，我们有 $\tilde{k}(s) = k(s)$，(即曲率保持不变)

和 $\tilde{n} = nT$.

最后考察副法向量 $\tilde{b}$，有

$$\tilde{b} = \tilde{t} \wedge \tilde{n} = (tT) \wedge (nT) = (t \wedge n)T.$$

这里我们用到 $\det T = 1$

故 $\tilde{b} = bT$，亦即 $-\tilde{\tau}\tilde{n} = -\tau nT$

$\xRightarrow{\tilde{n} = nT} \tilde{\tau} = \tau$. □

空间曲线基本定理

定理 4.1 设 $k, \tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为两个连续函数且 $k > 0$ on $[a,b]$，则(i)存在一条弧长参数曲线 $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ 以 k, τ 为曲率和挠率.

(ii) 且任何两条这样的曲线 $r_1, r_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$，存在 E^3 的一个刚体运动 T 把曲线 r_2 变为 r_1，即 $r_1 = T \circ r_2$.

证明：想法类似于平面曲线情形. 平面情形我们要先解曲线的切向量，这里我们要先解曲线的切向量、主法向量和副法向量。

考虑常微分方程

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

$v_1, v_2, v_3 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

此方程也可写成 $\frac{d}{ds}v_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j$, $a_{ij} = -a_{ji}$,

我们选定初值 $v_1(a), v_2(a), v_3(a)$ 为两两标准正交且有正定向的三个向量，则由常微方程理论，有解 $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$.

下面我们说明积分 $v_1(s)$ 即为所找曲线。为此目的，我们须首先证明 $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ 对任何 s 均为标准正交.

注意到

$$\frac{d}{ds}\langle v_i(s), v_j(s)\rangle = \langle \frac{dv_i}{ds}, v_j(s)\rangle + \langle v_i(s), \frac{dv_j}{ds}\rangle$$

$$= \langle \sum_{k=1}^{3} a_{ik} v_k, v_j(s)\rangle + \langle v_i(s), \sum_{k=1}^{3} a_{jk} v_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(a_{ik}\langle v_k, v_j\rangle + a_{jk}\langle v_i, v_k\rangle\right) \qquad i,j = 1,2,3.$$

也即 $\{\langle v_i, v_j\rangle, i,j=1,2,3\}$ 满足一个齐次线性常微分方程组，在给定的初值 $\langle v_i, v_j\rangle(a) = \delta_{ij}$ 下，解是唯一的.

可以直接验证，$\langle v_i, v_j\rangle(s) \equiv \delta_{ij}$ 是方程的解.

$$\left(0 = \frac{d}{ds}\langle v_i(s), v_j(s)\rangle = \sum_{k=1}^{3}(a_{ik}\delta_{kj} + a_{jk}\delta_{ik}) = a_{ij} + a_{ji} \underset{\uparrow}{=} 0.\right)$$

反称 $a_{ij} = -a_{ji}$.

故唯一性说明 $\langle v_i(s), v_j(s)\rangle = \delta_{ij}$, $\forall s$.

即 $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ 对任何 s 均为标准正交.

现在来解 $\begin{cases} \frac{dr}{ds} = v_1(s) \\ r(a) = r_0 \leftarrow \text{给定一初值} \end{cases}$

则 $\left|\frac{dr}{ds}\right| = |v_1(s)| = 1$, $\Rightarrow$ r 为弧长参数化

从而 $t(s) = \dot{r}(s) = v_1(s)$，由定义知曲率为 $|\dot{t}(s)| = |\dot{v}_1(s)|$

$$= |k(s)v_2(s)| \underset{\uparrow}{=} k(s)$$

$k>0$.

$\Rightarrow$ 主法向量为 $n(s) = \frac{1}{\kappa} v_1(s) = \frac{1}{\kappa}\cdot\kappa v_2(s) = v_2(s)$.

~~挠率为~~ $\Rightarrow$ 副法向量 $b \overset{?}{=} v_3$

为此我们须证明 $v_1(s), v_2(s), v_3(s)$ 对任意 s 定向始终为正.

这是因为 $(v_1(s), v_2(s), v_3(s))$ 为连续函数 (取值 1 或 -1)

且 $(v_1(a), v_2(a), v_3(a)) = 1$

故 $(v_1(s), v_2(s), v_3(s)) \equiv 1$.

故 $b = v_3 \Rightarrow \dot{b} = \dot{v}_3 = -\tau v_2 = -\tau n$

从而挠率为 τ 存在性得证.

若有两条如上曲线 $r_1, r_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, ~~[illegible]~~

考虑两条曲线在 $s=a$ 处的 Frenet 标架

$$\{r_1(a); t_1(a), n_1(a), b_1(a)\}$$
$$\{r_2(a), t_2(a), n_2(a), b_2(a)\}$$

我们知道它们均与 $\{i, j, k\}$ 定向相同, 故存在刚体运动 T 使变第一个标架为第二个标架. 即 r_1 和 $T\circ r_2$ 在 a 处 Frenet 标架相同。由 Serret - Frenet 公式

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

初值相同时, 解唯一. 故 r_1 和 $T\circ r_2$ 在任何点处 Frenet 标架均相同. 积分知, 这两条 r_1 和 $T\circ r_2$ 只相差一个平移. □

应用: 设 r 为弧长参数正则曲线, 且具有常数曲率 κ 和常挠率 τ,

则 (1) $\kappa = 0$ $\therefore$ r 为直线 ($\Leftarrow \dot{r} = 0 \Leftarrow \kappa = 0$)

(2) $\kappa > 0$, $\tau = 0$. r 为半径为 $\frac{1}{\kappa}$ 的圆

(3) $\kappa > 0$, $\tau \neq 0$ 由上述定理 1 及圆柱螺旋线例子, 知 r 是圆柱螺旋线.