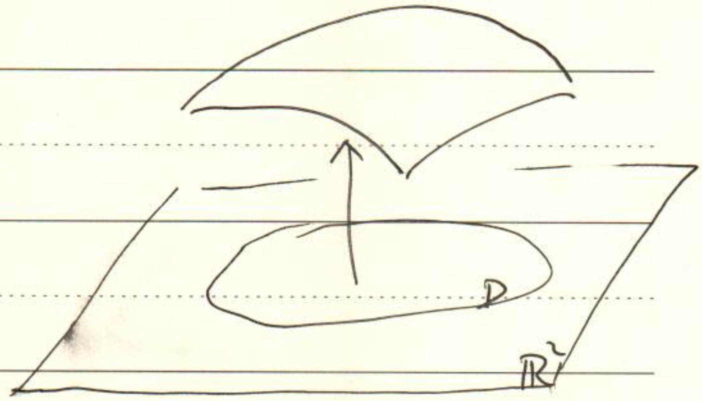
(III) 曲面的局部理论

§1 研究什么样的曲面?

曲面可看作是从平面区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 到 $E^3=\mathbb{R}^3$ 的映射
$\{(u,v)\}$ //



$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$

我们限定要研究的曲面满足下述两个条件.

(1) 每个分量函数是 C^∞ 的(即无限阶连续可微的)

(2) 向量

$$r_u:=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ 与 } r_v=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

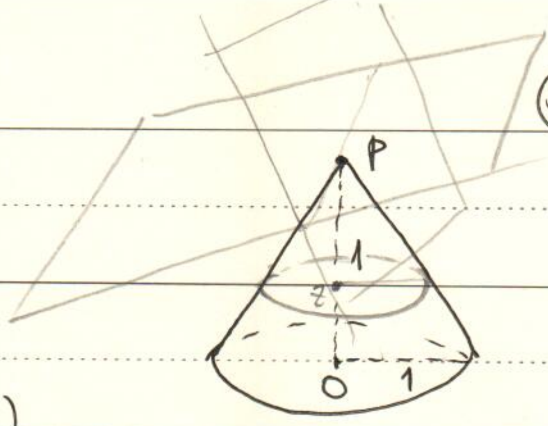
线性无关, 即 $r_u\wedge r_v\neq 0$. $\boxed{\text{正则曲面}}$

- r 是 E^3 的一个曲面(片) 这(可能)只是曲面的局部表示
- (u,v) 称为曲面的(坐标)参数.

下面我们来解释为什么要加这两个限制。第(1)个限制是自然的。因为为了发展曲面的微分几何,我们需要曲面的光滑性.(当然,大多时候要求 C^2,或 C^3 就够了. 为方便起见,我们不去追究最少所需光滑性,而一般的假设 C^∞).

第(2)个限制是为了保证曲面存在"切平面"(tangent plane),正如在曲线情形我们要求 $r'(t)\neq 0$ 以保证"切线"存在性一样。

先看一个反面例子：圆锥面



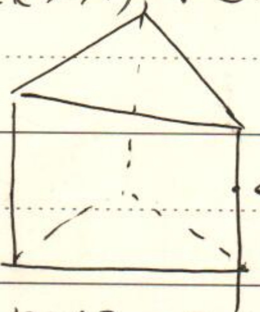
$$r(\theta,z) = \big((1-z)\cos\theta,\ (1-z)\sin\theta,\ z\big)$$

$$\begin{cases} r_\theta = \big(-(1-z)\sin\theta,\ -(1-z)\cos\theta,\ 0\big) \\ r_z = (-\cos\theta,\ -\sin\theta,\ 1) \end{cases}$$

At the point ~~$p=(0,0,1)$, 或 $p=p(0,1)$~~ $(0,0,1)$, we have

$$r_\theta\Big|_{z=1} = (0,0,0) \quad 故\ r_\theta \wedge r_z\Big|_{z=1} = 0.$$

当然在 $(0,0,1)$，r 也不可微.



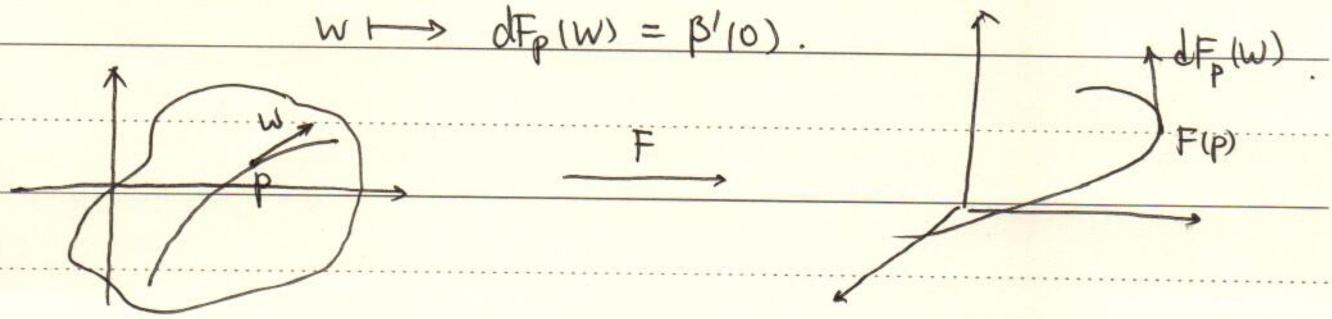
← 切平面也不存在.

为了解释曲面的切平面，我们先来回顾一些光滑映射的一些基本概念.

$\boxed{\text{光滑映射的 differential}}$

定义 设 $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为一光滑映射。~~则F的d~~ 对 $p \in U$，F 在该点的 differential $dF_p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 定义如下：对任一 $w \in \mathbb{R}^n$，设 $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ 为一条满足 $\alpha(0)=p$，$\alpha'(0)=w$ 的光滑曲线，则 $\beta = F\circ\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ 也是一条光滑曲线，

$$w \longmapsto dF_p(w) = \beta'(0).$$



当然我们要说明这个定义是良定的 (well-defined)，也即 $dF_p(w)$ 不依赖于曲线 α 的选取。实际上我们还会看到，$dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是一个线性映射。

为方便起见，我们在此讨论 $n=2$，$m=3$ 的情形。我们记 $\mathbb{R}^2$ 在标架 $\{(0,0);(1,0),(0,1)\}$ 下的坐标为 (u,v)，$\mathbb{R}^3$ 在 $\{(0,0,0);(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ 下坐标为 (x,y,z)。则 α 可写作 $(u(t),v(t))$，$t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$。

从而 $w=\alpha'(0)=(u'(0),v'(0))$。

映射 $F(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，则

$$\beta(t)=F\circ\alpha(t)=\big(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t))\big)$$

$$\beta'(t)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial x}{\partial v}v'(t),\ \frac{\partial y}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial y}{\partial v}v'(t),\ \frac{\partial z}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial z}{\partial v}v'(t)\right)$$

从而有

$$dF_p(w)=\beta'(0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'(0)\\ v'(0)\end{pmatrix}$$

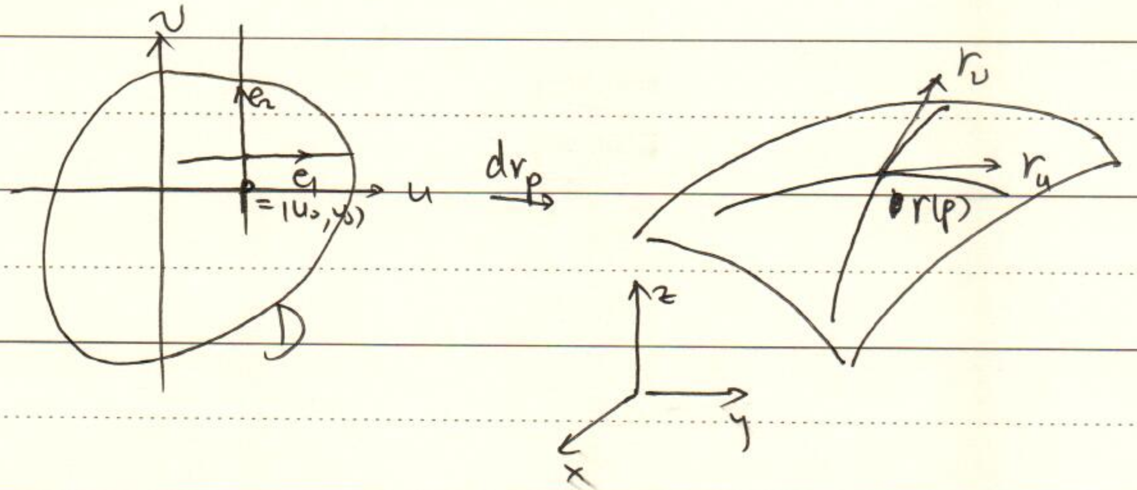
$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix} w$$

F在p点的 Jacobian 矩阵

故 dF_p 是一个线性映射，且 $dF_p(w)$ 不依赖于 α 的选取。

切平面 考虑曲面(片)

$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),\quad (u,v)\in D$$



$r: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

在D中考虑曲线 $u \longrightarrow (u, v_0)$

则 dr_p 映 $e_1 \in \mathbb{R}^2$ 为 $\left.\frac{d}{du}\right|_{u=u_0} r(u, v_0) = r_u(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$.

类似地，考虑曲线 $v \longrightarrow (u_0, v)$

则 dr_p 映 $e_2 \in \mathbb{R}^2$ 为 $\left.\frac{d}{dv}\right|_{v=v_0} r(u_0, v) = r_v(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$

由前述讨论，dr_p 的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

注意 $r_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$

$r_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$

(i) 前面第(2)个限制要求 r_u, r_v 线性无关，保证了 $r_u(u_0, v_0)$, $r_v(u_0, v_0)$ 张成一张平面，称为曲面在 $r(u_0, v_0)$ 点的切平面.

$r_u(u_0, v_0)$, $r_v(u_0, v_0)$ 称为曲面在 $r(u_0, v_0)$ 点的坐标切向量.

(ii) 换句话讲，第(2)个限制保证 dr_p 的矩阵表示之两个列向量的线性无关，从而 $dr_p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是单射.

注意到，~~对D上任一曲线~~对任一向量 $w\in\mathbb{R}^2$，可找D上正则曲线 $(u(t),v(t))$ 满足 $(u(0),v(0))=(u_0,v_0)$，$(u'(0),v'(0))=w$，则

$$dr_p(w)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r(u(t),v(t)) = r_u\frac{\partial u}{\partial t}(0)+r_v\frac{\partial v}{\partial t}(0)$$

是 r_u 和 r_v 的线性组合，故落在曲线在 $r(u_0,v_0)$ 点的切平面内。

因为 $dr_p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 是单射，故 $dr_p:\mathbb{R}^2\to$ $r(u_0,v_0)$ 点曲面的切平面 是一一的。

性质1.1：给定曲面S上任一点P．则P点处S的切平面 T_PS 等于曲面上过P点的曲线在P点的切向量全体． □

(iii) 第(2)个限制也可被表述为，下列 Jacobian 行列式至少有一个不为0．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}.$$

$\boxed{\text{法向量}}$ $r_u(u_0,v_0)\wedge r_v(u_0,v_0)$ 与 $r_u(u_0,v_0)$ 及 $r_v(u_0,v_0)$ 均正交，故与整个 $r(u_0,v_0)$ 处的切平面垂直．我们称过 $r(u_0,v_0)$ 点与切平面 $T_{r(u_0,v_0)}S$ 垂直的直线为曲线在该点的法线．

$r_u(u_0,v_0)\wedge r_v(u_0,v_0)$ 是曲面在该点的一个法向量．且

$$\{r(u_0,v_0);\ r_u,\ r_v,\ r_u\wedge r_v\}$$

构成 E^3 的一个自然定向的标架．

§4 ~~例~~

$\boxed{\text{参数变换：曲线的切平面和法线与参数选取无关}}$

设 $r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, $(u,v)\in D$ 是正则的(参数)曲面

考虑另一种参数 $(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}$.

两种参数之间变换 $\sigma:(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}\longrightarrow(u,v)\in D$

当然我们希望另一种参数 $(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}$ 仍是正则的参数化. 即

记 $r(\bar{u},\bar{v})=r\circ\sigma(\bar{u},\bar{v})$, 有 $r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}\neq 0$.

注意到
$$\begin{cases} r_{\bar{u}}=r_u\dfrac{\partial u}{\partial\bar{u}}+r_v\dfrac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\[2mm] r_{\bar{v}}=r_u\dfrac{\partial u}{\partial\bar{v}}+r_v\dfrac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{cases}$$

或写作
$$\begin{pmatrix} r_{\bar{u}}\\ r_{\bar{v}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\bar{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial\bar{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\end{pmatrix}\qquad(*)$$

$r(\bar{u},\bar{v})$ 切平面的基

$r(u,v)$ 切平面的基

回忆习题一, 5 ([PC], 13页), 我们有(或简单地直接计算)

$$r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\bar{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial\bar{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{pmatrix} r_u\wedge r_v$$

故要保证新参数 $(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}$ 是正则的, 我们需要求 $\sigma:\bar{D}\to D$ 的 Jacobian 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\bar{u}} & \dfrac{\partial u}{\partial\bar{v}}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial\bar{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{vmatrix}\neq 0.$$

这也是保证参数变换 $\sigma:\bar{D}\to D$ 是一一变换的要求

此时，由(*)式知，σ 的 Jacobi 阵也是中切平面之基变换.
以上述讨论看出，两个不同的正则参数化给出相同的切平面.

当 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}>0$ 时，法向量 $r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}$ 和 $r_u\wedge r_v$ 的方向相同，~~本~~参数变换 $\sigma:\bar{D}\to D$ 称为同向参数变换.

当 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}<0$ 时，法向量 $r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}$ 和 $r_u\wedge r_v$ 的方向相反，参数变换 $\sigma:\bar{D}\to D$ 称为反向参数变换.

§2 例子 正则(参数)曲面.

a) 光滑函数的图：设 $f: D\to\mathbb{R}$ ($D\subset\mathbb{R}^2$) 为光滑函数，则

$$r(u,v)=(u,v,f(u,v))$$

是正则(参数)曲面.

这是因为 $r_u=(1,0,f_u)$ 线性无关，

$$r_v=(0,1,f_v)$$

特别地，Jacobian 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$

$$r_u\wedge r_v=(-f_u,-f_v,1)$$

~~对于满足 $F(x,y,z)=0$ 的点之全体.~~

b) 考虑 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z)=0\}$

当 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$ 时，隐函数定理 $\Rightarrow$ $\exists$ (x_0,y_0) 的小邻域 D，使 $F(x,y,z)=0$ 有显式表示

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,\quad z_0=f(x_0,y_0).$$

故而在 (x_0,y_0,z_0) 的一个小邻域内，可表示为

$$r(x,y)=(x,y,f(x,y)).$$

一般地，$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq0$ 时，$F(x,y,z)=0$ 的点 (x_0,y_0,z_0) 邻近确定了一个正则曲面(片)。