补1

上次课有同学问 做参数变换时

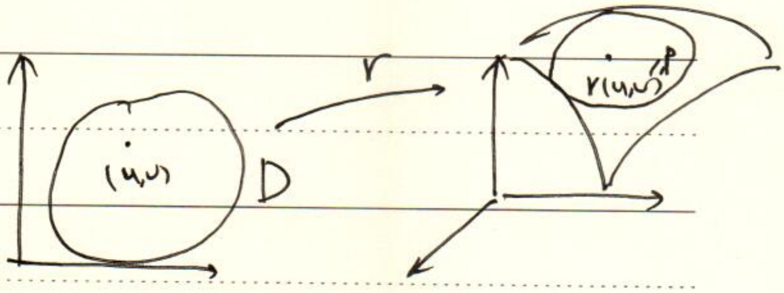
$$\sigma: \bar{D} \to D$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)$$

为什么这个变换是可微的? 我们只容许可微的参数变换, 我们说这个限定是自然的.

这个是我们需要假定的. 如果我们讨论"整体"的曲面的概念, 而不只是一个曲面片, 我们实际需要:

曲面 S 上任一点 p, 存在其一个邻域 V in $\mathbb{R}^3$ 使映射 $r: D \to V \cap S$ 将开区域 D 映满 $V \cap S$

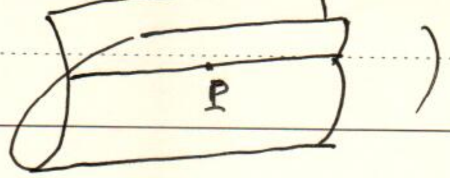


使 (i) r 是 C^∞ 的.

(ii) $r: D \to V \cap S$ 是可逆的, 且 $r^{-1}: V \cap S \to D$ 是 C^∞ 的.

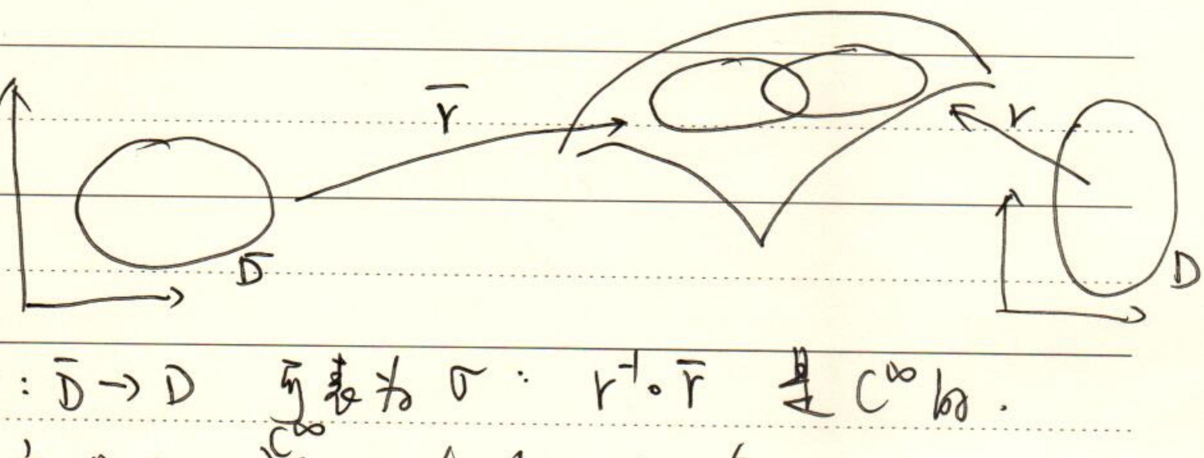
(这保证了曲面不自交.)

(亦即 r 是 1-1 的, 双向光滑的)



(iii) $r_u \wedge r_v \neq 0$ at any $p \in D$.

这样地话, 如果同一曲面上有两种如上映射 $r, \bar{r}$



则 $\sigma: \bar{D} \to D$ 可表为 $\sigma = r^{-1} \circ \bar{r}$ 是 C^∞ 的.

这实际上就是(2维) C^∞ 微分流形的概念.

下面我们说明，有了(ii)就不需要(iii).

首先：$r: D \to V\cap S$ 是1-1的，双向连续光滑的知

$\forall p\in D$，dr_p 满秩，即 Jacobian 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$ 满秩.

故而 r_u, r_v 线性无关，也即 $r_u \wedge r_v \neq 0$ at $p\in D$.

再者，对任一点 $p=(u_0,v_0)$，由 $r_u\wedge r_v \neq 0$ at $p\in D$

知

$$r_u\wedge r_v\Big|_{(u_0,v_0)} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\Big|_{(u_0,v_0)} \neq 0$$

则三个 Jacobian 行列式中至少有一个不为0. 不妨设

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0.$$

由反函数定理知，存在 (u_0,v_0) 在 D 内的邻域 U，使得映射

$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

在 U 上有反函数

$$(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

或写作 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

满足 $x(u(x,y), v(x,y)) \equiv x$，$y(u(x,y), v(x,y)) \equiv y$.

这时 $z = z(u,v) = z(u(x,y), v(x,y)) \overset{\text{记作}}{=} z(x,y)$.

从而可给曲面 $r(U)$ 的参数化

$$(x, y, z(x,y)), \quad (x,y)\in U\subset D.$$

特别地，我们有 $(u,v) \leftrightarrow (x,y,z(x,y))$ 是 U 和 $r(U)$ 之间的

一一对应. ($(x,y) \leftrightarrow (u,v)$ 是一一对应)

亦即我们有：$r: (u,v) \mapsto r(u,v)$，$(u,v)\in U$ 是可逆的，

上述讨论表明，替 (iii) 为 (ii) 并未加强对曲面的限制。当然这里有一个细节，即由 (iii) 推 (ii) 时，p 的邻域 U 有可能要换小于 D.

这实际上牵涉大家以后学习微分流形时的坐标图册和最大坐标图册的问题. 我们索性在这里一并解释.

曲面 S

- 坐标图 (chart) (U, h) an open subset $U \subset M$

  $h: U \to D \subset \mathbb{R}^2$ 同胚 (homeomorphism)

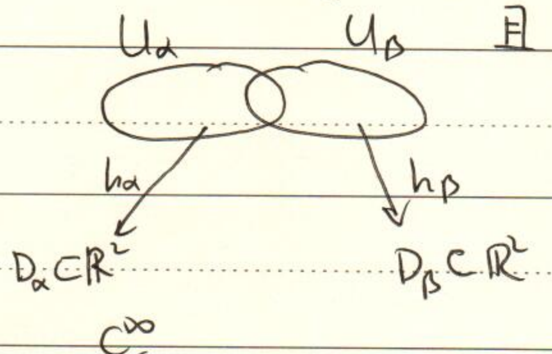
- C^∞ 坐标图册 (atlas).

  一族 $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ (U_α, h_α) 坐标图 使得 $\bigcup_\alpha U_\alpha = S$

  且 $h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$: ~~$D_\alpha \to D_\beta$~~

  $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$

  是 C^∞ 的.



两个坐标图册 $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$，$\{(V_\beta, f_\beta)\}$ 称为相容的 (compatible)，如果它们的并仍为一个 C^∞ 坐标图册. "相容关系"是个等价关系. 故存在一个最大 C^∞ 坐标图册 (maximal C^∞ atlas). 这个最大 C^∞ 坐标图册称为 S 的一个 C^∞ 微分结构.

一个拓扑曲面 (第二可数 Hausdorff 空间 S，每一点 p 都有一个邻域 $N(P)$ 同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中一个开集) + 一个 C^∞ 微分结构，称为一个 (2-dim) 微分流形.

此时，由(*)式知，σ 的 Jacobi 阵也是中切平面之基变换。
以上述讨论看出，两个不同的正则参数化给出相同的切平面。

当 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}>0$ 时，法向量 $r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}$ 和 $r_u\wedge r_v$ 的方向相同，~~本~~参数变换 $\sigma:\bar{D}\to D$ 称为 同向参数变换。

当 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}<0$ 时，法向量 $r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}$ 和 $r_u\wedge r_v$ 的方向相反，参数变换 $\sigma:\bar{D}\to D$ 称为 反向参数变换。

§2 例子 正则(参数)曲面

a) 光滑函数的图：设 $f: D\to \mathbb{R}$ $(D\subset\mathbb{R}^2)$ 为光滑函数，则

$$r(u,v)=(u,v,f(u,v))$$

是正则(参数)曲面。(回忆，前述补1-3，说明一个正则曲面局部之部局部有这种表示。)

这是因为 $r_u=(1,0,f_u)$ 线性无关，

$$r_v=(0,1,f_v)$$

特别地，Jacobian 行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$

$$r_u\wedge r_v=(-f_u,-f_v,1)$$

~~对于满足 $F(x,y,z)=0$ 的点之全体~~

b) 考虑 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z)=0\}$

当 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 时，隐函数定理 $\Rightarrow$ $\exists$ (x_0,y_0) 的小邻域 D，使 $F(x,y,z)=0$ 有显式表示

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,\quad z_0=f(x_0,y_0).$$

故曲面在 (x_0,y_0,z_0) 的一个小邻域内，可表示为

$$r(x,y)=(x,y,f(x,y)).$$

一般地，$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 时，$F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 邻近确定了一个正则曲面(片)。

一般地，对光滑映射 $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，注意

$$dF_p \underset{\text{作为矩阵}}{=} (F_x, F_y, F_z) \underset{\text{作为向量}}{=} \nabla F(x_0, y_0, z_0), \quad p = (x_0, y_0, z_0).$$

要求 $\nabla F \neq 0$，即要求 dF_p 是满秩的。一个光滑映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 在 $p \in \mathbb{R}^n$ 处 dF_p 若不满秩，则称 p 为 F 的临界点 (critical point)，值 $F(p) \in \mathbb{R}^m$ 称为 F 的临界值 (critical value)。$\mathbb{R}^m$ 中除临界值外的点称为<u>正则值</u> (regular value).

从而我们有如下性质

<u>性质 2.1</u>. 设 $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，$a \in F(D)$ 为一正则值，则 $\forall (x_0, y_0, z_0) \in F^{-1}(a)$ 邻近确定了一个正则曲面片.

证明：类似地应用隐函数定理。□

考查该曲面片上任一正则曲线 $(x(t), y(t), z(t))$，我们有 $F(x(t), y(t), z(t)) = a$

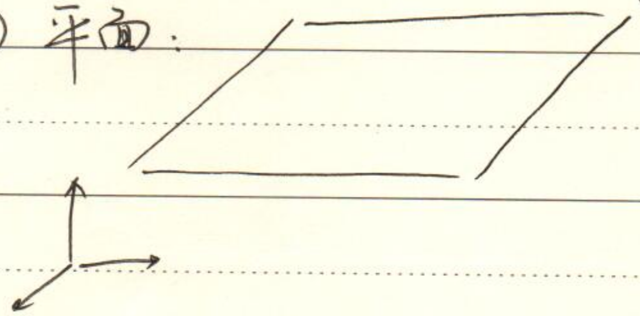
求导：$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$.

即 $(F_x, F_y, F_z) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) = 0$.

换言之，∇F 为该曲面(片)的法向量.

下面讨论一些具体的例子

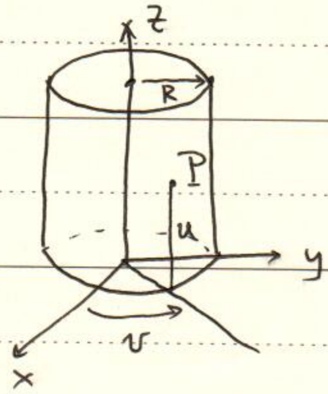
c) 平面：



可参数化为

$$r(u,v) = (u, v, 0)$$
$$r_u = (1, 0, 0)$$
$$r_v = (0, 1, 0)$$
$$r_u \wedge r_v = (0, 0, 1)$$

d) 圆柱面



可参数化为

$$r(u,v) = (R\cos v, R\sin v, u)$$
$$0 < v < \pi, \quad u \in \mathbb{R}.$$

坐标切向量

$$r_u = (0, 0, 1)$$
$$r_v = (-R\sin v, R\cos v, 0)$$

$\Rightarrow$ 法向量 $r_u \wedge r_v = (-R\cos v, -R\sin v, 0)$

e) 球面. $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = a^2$ 半径为 a 的球面.

注意 $\nabla F = 2(x,y,z) \neq 0$, 知球面上每点局部论也为一正则曲面(片)(性质2.1). ~~且法向量为~~

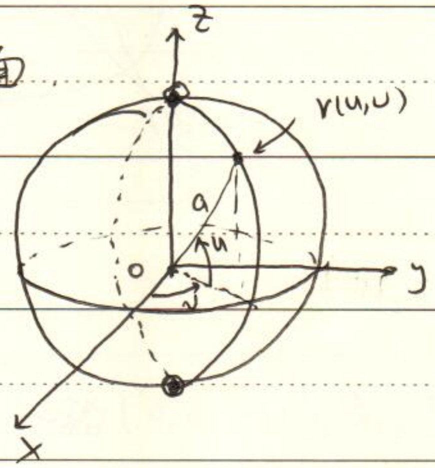
故球面的位置向量 (x,y,z) 为其法向量。

下面来看可能的参数表示, 最直接的一种是考虑

$$D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<a^2\}$$

则 $r(x,y) = (x, y, \sqrt{a^2-x^2-y^2})$

可以看到这个曲面片只是上半球面.



另一种参数表示:

$$\tilde{D} = \{(u,v) : -\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2},\ 0<v<2\pi\}$$

$$r(u,v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ a\sin u)$$

可以看到这个曲面片是球面去掉南极点、北极点和连接它们的一条大圆弧.

参数变换 $\sigma: \tilde{D} \to D$ 在两个曲面片公共部分为

$$\cancel{(x,y) \mapsto \left(\arcsin\frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{a},\ \arctan\frac{y}{x}\right)}$$

$$(u,v) \mapsto (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v)$$

(但注意 σ 不是定义在整个 $\tilde{D}$ 上)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -a\cos v\sin u & -a\cos u\sin v \\ -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v \end{vmatrix}$$

$$= -a^2\sin u\cos u \neq 0 \qquad 0<u<\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow (x,y,z) = \Big(\frac{2a^2u}{\quad},\ \frac{2a^2v}{\quad},\ a\frac{u^2+v^2-a^2}{\quad}\Big) := r(u,v)$

实际上，球面去掉一个点，可以被参数化为一个正则曲面片

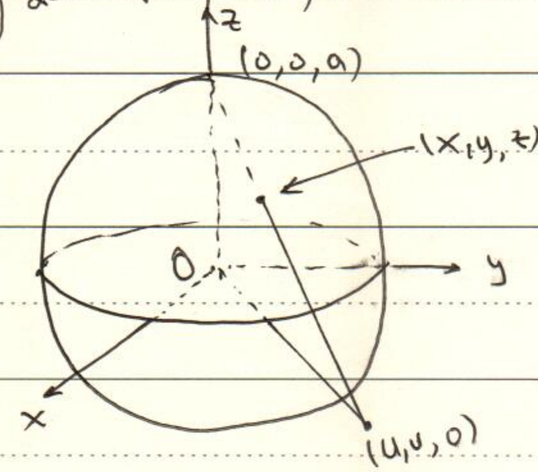
$\boxed{\text{球极投影}}$

去掉北极点 $(0,0,a)$ 后，

球面上任一点 (x,y,z)

与 $(0,0,a)$ 连线，与 xy 平

面交于唯一一点 $(u,v,0)$



因为 $\dfrac{x}{u} = \dfrac{a-z}{a} \Rightarrow u = \dfrac{ax}{a-z}$.

类似地可得，相交点为 $\left(\dfrac{ax}{a-z}, \dfrac{ay}{a-z}, 0\right)$.

反过来看，xy 平面上任一点 $(u,v,0)$ 与北极 $(0,0,a)$ 连线，与球面交于唯一的点. 解

$$x = \frac{(a-z)u}{a}, \quad y = \frac{(a-z)v}{a}$$

$$x^2+y^2 = \frac{(a-z)^2(u^2+v^2)}{a^2} = a^2 - z^2 \quad \text{得}$$

$$\left(\frac{u^2+v^2}{a^2}+1\right) z = a\left(\frac{u^2+v^2}{a^2}-1\right)$$

亦即 $$z = \frac{a^2}{a^2+u^2+v^2} \cdot \frac{u^2+v^2-a^2}{a} = \frac{a(u^2+v^2-a^2)}{a^2+u^2+v^2}$$

$$= \frac{a(u^2+v^2+a^2-2a^2)}{a^2+u^2+v^2} = a - \frac{2a^3}{a^2+u^2+v^2}$$

从而 $$a - z = \frac{2a^3}{a^2+u^2+v^2}$$

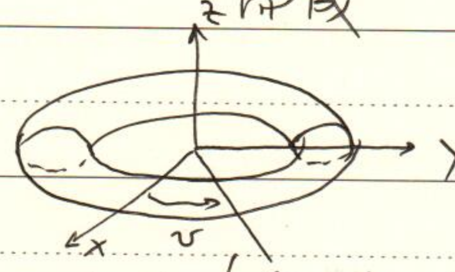
故 $$x = \frac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2}$$

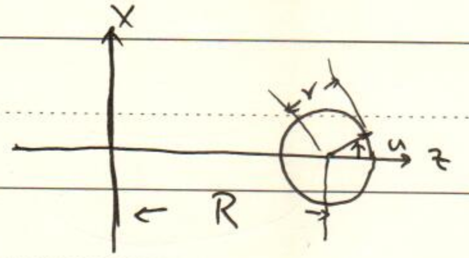
$$\Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2}, \frac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2}, a\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2+u^2+v^2}\right) := r(u,v)$$

即为球面去掉一点的参数表示. $\{(u,v)\} = D = \mathbb{R}^2$.

现为 球极投影参数表示.

f). 环面. 我们把环面看作是 xz 平面上一个圆绕 z 轴旋转而成





$$r(u,v)=\Big((R+r\cos u)\cos v,\ (R+r\cos u)\sin v,\ r\sin u\Big)$$

$$0<u<2\pi,\ 0<v<2\pi$$

$$r_u=(-r\sin u\cos v,\ -r\sin u\sin v,\ r\cos u)$$

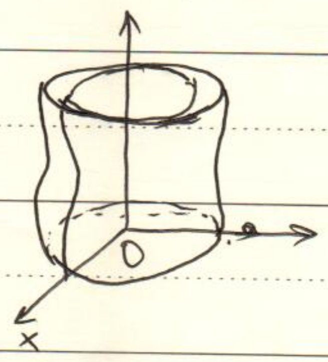
$$r_v=(-(R+r\cos u)\sin v,\ (R+r\cos u)\cos v,\ 0)$$

易见它们线性无关

g) 一般旋转面. 以上述柱面、球面(何)、环面的例子, 我们有以下一般形式: xz 平面上与 z 轴不交的正则(参数)曲线

$$\cancel{(x,z)=}\ (f(u),\ g(u))$$

绕 z 轴旋转得到曲面.



$$r(u,v)=(f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$$

$$-\infty<u<\infty,\ 0<v<\pi/2$$

$$r_u=(f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ g'(u))$$

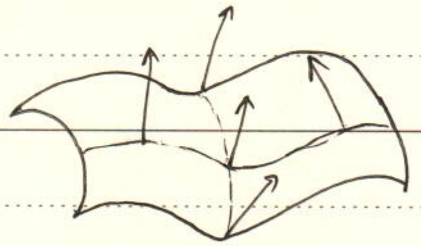
$$r_v=(-f(u)\sin v,\ f(u)\cos v,\ 0)$$

相应的三个 Jacobian 行列式为

$$f'(u)f(u),\ -f(u)g'(u)\cos v,\ f(u)g'(u)\sin v$$

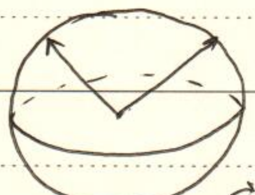
必有一不为 0. 故 $r_u\wedge r_v\neq 0$.

§3. 曲面的弯曲：据高斯 1827年10月8日.



曲面的法向量可以有无穷多种可能的方向.

把这些向量平移到同一起点，则终点落在



S^2

辅助球面 (auxiliary sphere)

这个球面的球心和半径的选取都是十分任意的. 我们不妨就取半径为 1.

"This procedure agrees fundamentally with that which is constantly employed in astronomy, where all directions are referred to a fictitious celestial sphere of infinite radius."

(高斯做过哥廷根天文台台长)

设曲面 M 的参数表示为 $r = r(u,v)$，则它每一点处有一个确定的单位法向量 $n(u,v) = \dfrac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$. 我们实际上得到如下的一个映射

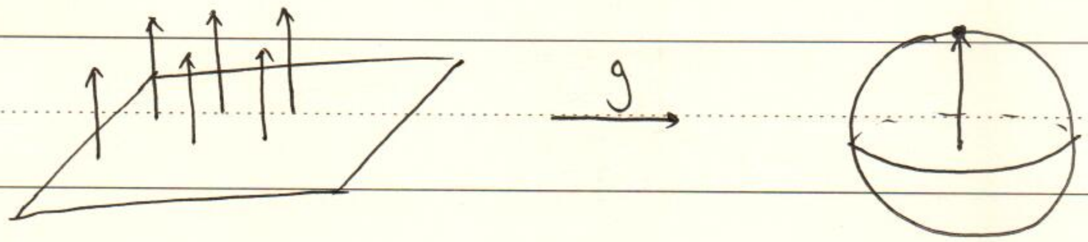
$$g: M \longrightarrow S^2$$

$$r(u,v) \longmapsto n(u,v)$$

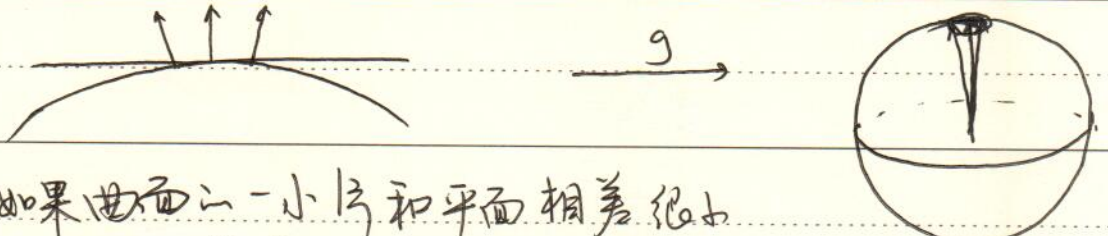
← 取起点为原点 O 的该向量，则由此代表其终点(落在 S^2 上)

这可称为一个法映射 (normal map). 现在一般称之为高斯映射 (Gauss map). 这样曲面上的(点，线，面)将对应于球面上的(点，线，面)

观察：如果 M 是平面

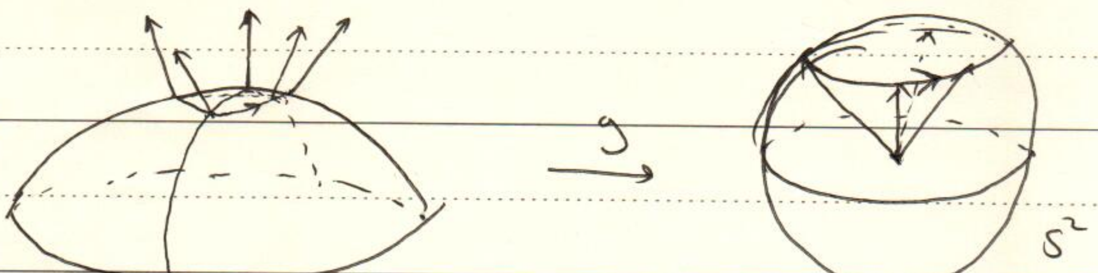


高斯映射把整个平面映为球面 S^2 上的一个点。

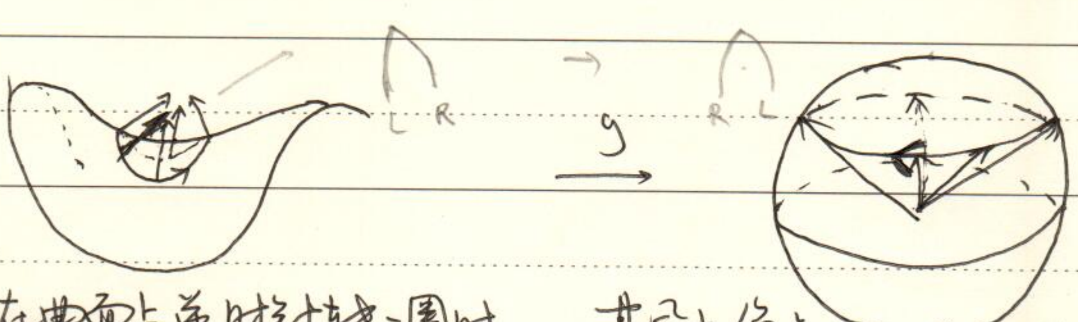


如果曲面上一小片和平面相差很小
（换言之，直观上曲面弯曲很小）
则这一小片对应于球面上区域的面积会很小！

所以给定曲面上一个小区域 $A \subset M$，其"积分曲率"(integral curvature) 就定义为 $g(A)$ 的面积。这是非常自然的概念，是区域总曲率 (total curvature) 的一个量度，当然，~~具有~~相同大小 ~~integral curvature~~ 两片曲面，也有两种不同 高斯映射下的像的表现。



当在曲面上逆时针转一圈时，其 S^2 上的像点也逆时针转一圈 (+)



在曲面上逆时针转一圈时，其 S^2 上像点顺时针转一圈 (−)

我们用总曲率 (total curvature) 的正负号来区分这两种情形.

但一个曲面上上述两种情况可能都有发生。所以更精确的定义需要进一步的缩小曲面片的大小，而谈论一点处的曲率。

我们在这里先来讨论一个不严格地曲率定义。定义曲面M上一点P的高斯曲率 $K(P)$ 如下：

$$K(P)=\lim_{A\to P}\frac{\text{area } g(A)}{\text{area}(A)}.$$

如前面解释的，area $g(A)$ 是有符号的，这符号当A充分小时是唯一确定的。极限是取越来越小的包含P的邻域A。首先要问这个极限是否良定？

我们且不去讨论这个定义的严格性，而先来讨论几个基本的例子：

前面已讨论对平面而言，其高斯映射下的像集是一个点，故有：

$$K(P)=\lim_{A\to P}\frac{\text{area } g(A)}{\text{area } A}=\lim_{A\to P}\frac{0}{A}=0.$$

"平面不弯曲"

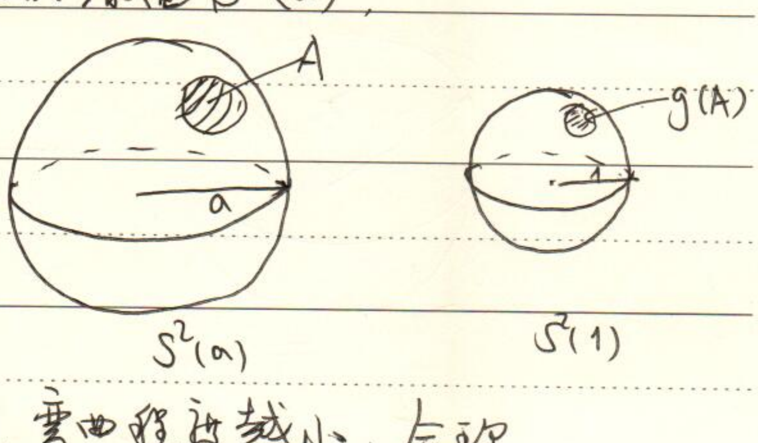
再来考查球面 S^2　　$g: S^2\longrightarrow S^2$ 是恒等映射。

所以对任意 $P\in S^2$，我们有

$$K(P)=\lim_{A\to P}\frac{\text{area } g(A)}{\text{area } A}=\lim_{A\to P}\frac{\text{area } A}{\text{area } A}=1.$$

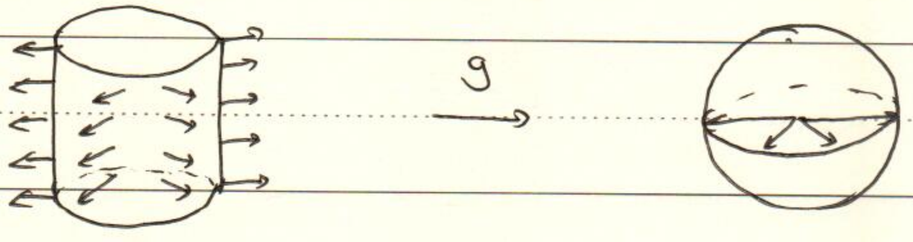
稍复杂一些，考虑半径为a的球面 $S^2(a)$，

$$K(P)=\lim_{A\to P}\frac{\text{area } g(A)}{\text{area}(A)}=\lim_{A\to P}\frac{\frac{1}{a^2}\text{area}(A)}{\text{area}(A)}=\frac{1}{a^2}.$$



半径越大，弯曲程度越小，合理

再来考查圆柱面.



圆柱面在高斯映射下的象集是赤道 S^1 所以

$$K(P)=\lim_{A\to P}\frac{\text{area } g(A)}{\text{area } A}=\lim_{A\to P}\frac{0}{\text{area } A}=0.$$

"圆柱面"不弯曲"!!! "违反"直觉，但高斯的研究最终解释这个曲率是 the "right" definition.

上述高斯曲率的更核定义可定义为相应的"面积元"的比值. 为此目的我们要能计算曲面的面积。为计算面积，当然首先要能计算距离，曲面上的距离，也就是要能计算曲面上连接任给两点的曲线弧长.

考虑曲面 M 上一条曲线 $r(u(t), v(t))$，$t\in(a,c)$ 我们有

$$r'(t)=r_u u'(t)+r_v v'(t)$$

从而弧长 $$s(t)=\int_a^t |r'(u)|\,du$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}=|r'(t)|=\sqrt{\langle r_u u'(t)+r_v v'(t),\ r_u u'(t)+r_v v'(t)\rangle}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\langle r_u,r_u\rangle\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\langle r_u,r_v\rangle\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\langle r_v,r_v\rangle\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

~~定义~~记： $E=\langle r_u,r_u\rangle$， $F=\langle r_u,r_v\rangle$， $G=\langle r_v,r_v\rangle$

我们有 $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

实际上，这里 E, F, G 沿用了高斯当年的记号，成为如今的标准记号

由此我们得如下二次微分式

$$(ds)^2 = E\,du\cdot du + 2F\,du\cdot dv + G\,dv\cdot dv$$

我们记 $I := (ds)^2$，称其为曲面 M 的第一基本形式。

我们会接下来详细讨论第一基本形式给出了曲面上长度、面积、角度等"度量"结构。

高斯接下来推导了高斯曲率（高斯称为 measure of curvature）的四个计算公式，实际上由简到繁四个公式。最简单的公式是在曲面表为 $(u,v) \longmapsto (u,v,f(u,v))$ 形式时算得的，曲率 K 由五个不同的项给出。利用这个公式，高斯覆盖了之前 Euler 关于曲面曲率的定理（法曲率可表为两主曲率的线性组合）。

"These conclusions contains almost all that the illustrious Euler was the first to prove on the curvature of curved surfaces."

继续在曲面的其它表示下，高斯得到了用到 9 个不同项，和 15 个不同项的计算公式，并最终得到了第四个计算公式。简言之，这个公式说，曲率 K 可(仅)由 E, F, G，和它们的一阶、二阶导数给出!!! 也就是第一基本形式决定高斯曲率。

"...Thus the formula of the preceding article leads of itself to the remarkable

Theorem. If a curved surface is developed upon any other surface whatever, the measure of curvature in each point remains unchanged."

注意：所谓 "surface M is developed upon another surface N"，意即存在映射 $f: M \to N$ 为等距映射 (isometry) (保距离，i.e. 保第一基本形式)。"develop" 是个非常形象的概念。

这就解释了为什么圆柱面不弯曲，因为它局部与平面等距。

高斯进一步评论在曲面几何的研究中，应该注意区分两个不同的方面：

把曲面看作是 "a flexible, though not extensible solid"。也就是把曲面上的第一基本形式固定 (not extensible)，将曲面在空间中可弯曲 (flexible)

一方面的几何是依赖于曲面在空间中的呈现形式

另一方面的几何是不依赖于上述呈现形式，而只依赖于 I. ("the nature of a surface")

"To these latter properties, the study of which opens to geometry a new and fertile field."

在这种几何里，平面和 "a surface developable on a plane" 将被看作是相同的曲面。

"内蕴几何"

作业：阅读高斯1827年文章摘要，浏览原文 (主页已上传)

"好读书，不求甚解，每有会意，便欣然忘食"

—陶渊明