§4 曲面的第一基本形式

给定曲面 $M \subset E^3$，设其 $r = r(u,v)$ 为它的参数表示. 回忆其第一基本形式为如下二次微分式

$$I = (ds)^2 = E\,du\cdot du + 2F\,du\cdot dv + G\,dv\cdot dv$$

这里

$$E = \langle r_u, r_u\rangle,\quad F = \langle r_u, r_v\rangle,\quad G = \langle r_v, r_v\rangle$$

第一基本形式可以看作曲面上正则曲线的弧长微元的平方.

另一方面，第一基本形式可看作是曲面 M 上各点 P 的切平面 T_PM 的作为向量空间的一个内积. 回忆 T_PM 由向量 r_u 和 r_v 张成. 也就是说，$\forall\, v \in T_PM$，我们有表示

$$v = \lambda r_u + \mu r_v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

从而 v 的长度平方，也即内积 $\langle v, v\rangle$ 有

$$\langle v, v\rangle = \lambda^2 \langle r_u, r_u\rangle + 2\lambda\mu \langle r_u, r_v\rangle + \mu^2 \langle r_v, r_v\rangle$$

$$= \lambda^2 \underset{\uparrow}{E} + 2\lambda\mu F + \mu^2 \underset{\uparrow}{G}$$

向量 r_u 长度的平方　　　　向量 r_v 长度的平方

$$F = \langle r_u, r_v\rangle = |r_u||r_v|\cos\theta = \sqrt{EG}\,\cos\theta.$$

从而 $\dfrac{F}{\sqrt{EG}}$ 是 r_u 和 r_v 夹角的余弦. $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow F = 0\right)$

故 切向量 v 长度的平方为以矩阵 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 为系数的二次型

即 $$\langle v, v\rangle = (\lambda,\ \mu)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

更一般地，对 T_PM 的任意切向量

$v_1 = \lambda_1 r_u + \mu_1 r_v, \qquad v_2 = \lambda_2 r_u + \mu_2 r_v$

我们有内积

$$\langle v_1, v_2 \rangle = (\lambda_1 \quad \mu_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

可以说：M在P点处的第一基本形式"等价"于 T_pM 的内积.
(相互给出)

更进一步地，我们可以考查要求 $r_u \wedge r_v \neq 0$ 的另一层意思：

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = \langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2$$
$$= \langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle (1 - \cos^2\theta) > 0.$$

since $r_u \wedge r_v \neq 0$.
$\Downarrow$
$\cos^2\theta < 1$

注意到 $E > 0$, $G > 0$,
也就有 $r_u \wedge r_v \neq 0$ 保证了 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 是一个正定矩阵

从而 (*) 给出的确实是一个内积.

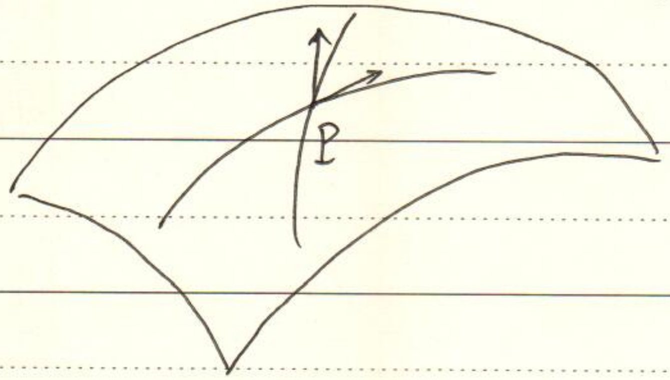
第一基本形式蕴含的几何量

回忆由第一基本形式的定义，我们知道可以由 I 计算曲面上曲线的弧长. 考虑曲线 $r(u(t), v(t))$, $t \in (a, c)$ 我们有：

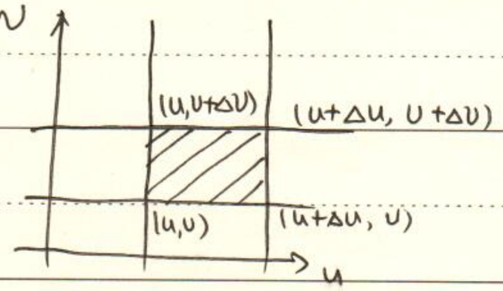
弧长 $$s(t) = \int_a^t ds = \int_a^t \frac{ds}{dt} \cdot dt = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} dt$$
$$= \int_a^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

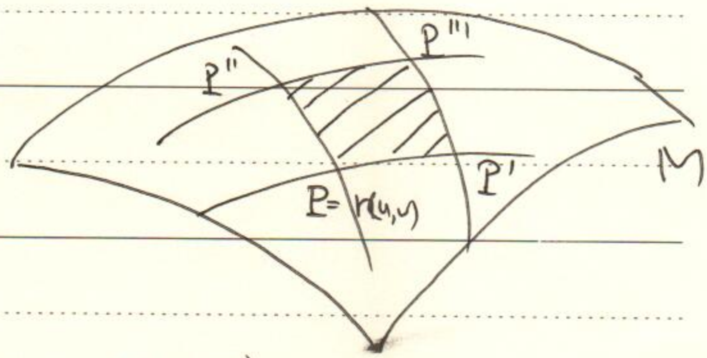
由上面"从"内积"角度"的解释，我们可以由 I 计算曲面

上两条曲线的夹角：
在相交点 P 处切向量的夹角.



下面我们来考察曲面片的面积的计算(直观,定义).





在 E^3 中，向量
$$\overrightarrow{PP'} = r(u+\Delta u, v) - r(u,v) = r_u\cdot\Delta u + \cdots \text{高阶项}$$
$$\overrightarrow{PP''} = r(u, v+\Delta v) - r(u,v) = r_v\cdot\Delta v + \cdots$$

因此 E^3 中平行四边形 $PP'P'''P''$ 的面积近似等于曲面上相应四边形的面积，前者近似等于向量 $r_u\cdot\Delta u$ 和 $r_v\cdot\Delta v$ 张成的平行四边形面积，即 $|(r_u\cdot\Delta u)\wedge(r_v\cdot\Delta v)| = |r_u\wedge r_v|\,\Delta u\Delta v$.

定义：对参数表示为 $r: D\to E^3$, $(u,v)\mapsto r(u,v)$ 的曲面片，定义其面积为
$$\iint_D |r_u\wedge r_v|\,du\,dv.$$
称 $d\sigma = |r_u\wedge r_v|\,du\,dv$ 为该曲面片的面积元.

注意由 Lagrange 恒等式，我们有

$$|r_u \wedge r_v|^2 = \langle r_u, r_u\rangle\langle r_v, r_v\rangle - \langle r_u, r_v\rangle^2$$
$$= EG - F^2 = \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}$$

故面积元 $d\sigma = |r_u \wedge r_v|\, du dv = \sqrt{EG-F^2}\, du dv$.

$\boxed{\text{上述讨论是否依赖于参数变换？}}$

定理4.1. 曲面M的第一基本形式与参数选取无关

证明：设 $(u,v) = \sigma(\bar u, \bar v)$ 为M的一个参数变换。

在参数 (u,v)，$(\bar u,\bar v)$ 下，其第一基本形式分别为

$$I(u,v) = E\,du du + 2F\,du dv + G\,dv dv$$
$$I(\bar u,\bar v) = \bar E\,d\bar u d\bar u + 2\bar F\,d\bar u d\bar v + \bar G\,d\bar v d\bar v.$$

其中：

$$\bar E = \langle r_{\bar u}, r_{\bar u}\rangle = \langle r_u \frac{\partial u}{\partial \bar u} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar u}, r_u \frac{\partial u}{\partial \bar u} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar u}\rangle$$
$$= E\left(\frac{\partial u}{\partial \bar u}\right)^2 + 2F\left(\frac{\partial u}{\partial \bar u}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \bar u}\right) + G\left(\frac{\partial v}{\partial \bar u}\right)^2$$

$$\bar F = \langle r_{\bar u}, r_{\bar v}\rangle = \langle r_u \frac{\partial u}{\partial \bar u} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar u}, r_u \frac{\partial u}{\partial \bar v} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar v}\rangle$$
$$= E\frac{\partial u}{\partial \bar u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \bar v} + F\left(\frac{\partial u}{\partial \bar u}\frac{\partial v}{\partial \bar v} + \frac{\partial u}{\partial \bar v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \bar u}\right) + G\frac{\partial v}{\partial \bar u}\cdot\frac{\partial v}{\partial \bar v}$$

$$\bar G = \langle r_{\bar v}, r_{\bar v}\rangle = \langle r_u \frac{\partial u}{\partial \bar v} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar v}, r_u \frac{\partial u}{\partial \bar v} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar v}\rangle$$
$$= E\left(\frac{\partial u}{\partial \bar v}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial \bar v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \bar v} + G\left(\frac{\partial v}{\partial \bar v}\right)^2.$$

上述关系式可以用矩阵形式写出如下：

$$\begin{pmatrix} \bar E & \bar F \\ \bar F & \bar G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar u} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar v} & \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial u}{\partial \bar v} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix}$$

（注意每一项均可写成二次型

$$\bar E = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar u} \end{pmatrix}$$

$$\bar F = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar v} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix}$$

$$\bar G = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar v} & \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar v} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix} \Bigg)$$

这里 $\bar J := \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar u} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar v} & \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix}$ 为参数变换的 Jacobian 矩阵.

$$\begin{pmatrix} \bar E & \bar F \\ \bar F & \bar G \end{pmatrix} = \bar J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \bar J^t.$$

可见得到)

$$\begin{cases} du = \frac{\partial u}{\partial \bar u} d\bar u + \frac{\partial u}{\partial \bar v} d\bar v \\ dv = \frac{\partial v}{\partial \bar u} d\bar u + \frac{\partial v}{\partial \bar v} d\bar v \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (du \ \ dv) &= (d\bar u \ \ d\bar v) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar u} & \frac{\partial v}{\partial \bar u} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar v} & \frac{\partial v}{\partial \bar v} \end{pmatrix} \\ &= (d\bar u \ \ d\bar v) \bar J. \end{aligned}$$

我们有第一基本形式满足

$$\mathrm{I}(\bar u, \bar v) = (d\bar u \ \ d\bar v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar u \\ d\bar v \end{pmatrix}$$

$$= (d\bar{u}\ d\bar{v})\, J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^t \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}$$

$$= (du\ dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = I(u,v). \qquad \square$$

实际上，上述不变性可由下面的I的表达式更简洁的看出。

参数表示 $r = r(u,v)$ 可看作向量值函数

$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$

其一阶微分 $dr = (dx(u,v),\ dy(u,v),\ dz(u,v))$

$$= (x_u du + x_v dv,\ y_u du + y_v dv,\ z_u du + z_v dv)$$

$$= r_u du + r_v dv$$

故 $I = E\, du\, du + 2F\, du\, dv + G\, dv\, dv$

$$= \langle dr, dr \rangle.$$

上面的证明实际上讨论的是一阶微分形式的不变性。

定理4.3 正则曲面片的面积与参数变换无关.

证明：设参数变换为 $(u,v) = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$. 由定理4.2的证明，

$$\det \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = \det J \cdot \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \det J^t$$

$$= (\det J)^2 \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

再由二重积分的变量替换公式有：

$$\cancel{\iint_{\bar{D}} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\, d\bar{u}\, d\bar{v}} \quad \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

$$= \iint_D \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}\, du\, dv = \iint_{\bar{D}} \sqrt{(\det J)^{-2} \det \begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix}}\, |\det J|\, d\bar{u}\, d\bar{v}$$

$$= \iint_{D} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\, d\bar{u}\, d\bar{v}. \qquad \square$$

定理4.3：曲面的第一基本形式在 E^3 的合同变换下不变

即：如果M参数表示为 $r = r(u,v)$，$\mathcal{T}$ 是 E^3 的一个合同变换，

$\mathcal{T}$ 将曲面 $r(u,v)$ 变为 $\tilde{r}(u,v) = \mathcal{T} \circ r(u,v)$

则第一基本形式 $\tilde{\mathrm{I}}(u,v)$ 与 $\mathrm{I}(u,v)$ 相同.

证明：设 $\mathcal{T}(P) = P\cdot T + P_0$，$\forall P \in E^3$ 为任一合同变换.

(故T为正交阵)．由 E, F, G 的几何意义,我们有

$$\tilde{E} = \langle \tilde{r}_u, \tilde{r}_u \rangle = \langle r_u \cdot T, r_u \cdot T \rangle = \langle r_u, r_u \rangle = E.$$

$$\tilde{F} = \langle \tilde{r}_u, \tilde{r}_v \rangle = \langle r_u \cdot T, r_v \cdot T \rangle = \langle r_u, r_v \rangle = F$$

$$\tilde{G} = \langle \tilde{r}_v, \tilde{r}_v \rangle = \langle r_v \cdot T, r_v \cdot T \rangle = \langle r_v, r_v \rangle = G.$$

故 $\tilde{\mathrm{I}}(u,v) = \tilde{E}\, du du + 2\tilde{F}\, du dv + \tilde{G}\, dv dv = \mathrm{I}(u,v)$ $\square$

例子

例4.1 (平面) $r(u,v) = (u, v, c)$ c是常数.

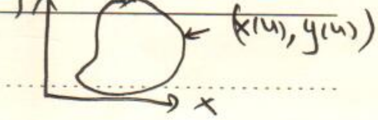
则 $r_u = (1,0,0)$，$r_v = (0,1,0)$

故而 $E = 1$，$G = 1$，$F = 0$.

第一基本形式 $\mathrm{I}(u,v) = du du + dv dv$

例4.2 (柱面) 不一定是圆柱面，可以是更一般地柱面

$r(u,v) = (x(u), y(u), v)$



2) $r_u = (x'(u), y'(u), 0)$, $r_v = (0, 0, 1)$

故而 $E = (x')^2 + (y')^2$, $G = 1$, $F = 0$.

从而第一基本形式

$$I = ((x')^2 + (y')^2)\, du du + dv dv.$$

取 u 为曲线 $(x(u), y(u))$ 的弧长参数，我们有

$$I = du du + dv dv$$

这里我们看到柱面和平面有相同的第一基本形式 !!

例 5.3 (球面) 半径 $a > 0$.

球坐标参数下： $D = \{(\theta, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi\}$

$$r(\theta, \varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi,\ a\cos\theta\sin\varphi,\ a\sin\theta)$$

$$r_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi,\ -a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)$$

$$r_\varphi = (-a\cos\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

故而 $E = a^2$, $F = 0$, $G = a^2\cos^2\theta$.

第一基本形式 $I(\theta, \varphi) = a^2(d\theta d\theta + \cos^2\theta\, d\varphi d\varphi)$.

球极投影参数下： $D = \{(u, v)\} = \mathbb{R}^2$

$$r(u, v) = \left(\frac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2},\ \frac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2},\ a\cdot\frac{u^2+v^2-a^2}{u^2+v^2+a^2}\right)$$

$$r_u = \left(\frac{2a^2(a^2+u^2+v^2) - 2a^2u\cdot 2u}{(a^2+u^2+v^2)^2},\ \frac{-2a^2v\cdot 2u}{(a^2+u^2+v^2)^2},\ \frac{2au(u^2+v^2+a^2) - a(u^2+v^2-a^2)\cdot 2u}{(u^2+v^2+a^2)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{2a^2(a^2-u^2+v^2)}{(a^2+u^2+v^2)^2},\ \frac{-4a^2uv}{(a^2+u^2+v^2)^2},\ \frac{4a^3u}{(u^2+v^2+a^2)^2}\right)$$

$$= \frac{4}{(\quad)^2}(du du + dv dv)$$

$$r_v = \left(\frac{-2a^2u(2v)}{(a^2+u^2+v^2)^2}, \frac{2a^2(a^2+u^2+v^2)-2a^2v\cdot 2v}{(a^2+u^2+v^2)^2}, \frac{2av(a^2+u^2+v^2)-a\cdot(u^2+v^2-a^2)\cdot 2v}{(a^2+u^2+v^2)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{-4a^2uv}{(a^2+u^2+v^2)^2}, \frac{2a^2(a^2+u^2-v^2)}{(a^2+u^2+v^2)^2}, \frac{4a^3v}{(a^2+u^2+v^2)^2} \right)$$

故而 $$E = \frac{1}{(a^2+u^2+v^2)^4}\Big(\underbrace{4a^4(a^2-u^2+v^2)^2 + \underbrace{16a^4u^2v^2+16a^6u^2}_{=4a^4(4u^2v^2+4a^2u^2)}}_{\begin{gathered}=4a^4(a^4+u^4+v^4-2a^2u^2+2a^2v^2-2u^2v^2+4u^2v^2+4a^2u^2)\\ =4a^4(a^4+u^4+v^4+2a^2u^2+2a^2v^2+2u^2v^2)\\ =4a^4(a^2+u^2+v^2)^2\end{gathered}} \Big)$$

$$= \frac{4a^4}{(a^2+u^2+v^2)^2}$$

类似地，有 $G = \frac{4a^4}{(a^2+u^2+v^2)^2}$

$$F = \frac{1}{(a^2+u^2+v^2)^4}\Big(\underbrace{-8a^4uv(a^2-u^2+v^2)-8a^4uv(a^2+u^2-v^2)}_{=-16a^6uv}+16a^6uv \Big)$$

$= 0$.

第一基本形式 $$I(u,v) = \frac{4a^4}{(a^2+u^2+v^2)^2}(dudu + dvdv)$$

$$= \frac{4}{\left(1+\frac{1}{a^2}(u^2+v^2)\right)^2}(dudu + dvdv)$$