1. 使 $F=\langle r_u, r_v\rangle=0$ 的参数 (u,v) 称为曲面的正交参数系. 给定一个曲面 S, 它的一个参数表示 $r=r(u,v)$. 证明: 对于曲面 S 上任一点 $P=r(u_0,v_0)$ 存在 P 的邻域 D 以及 D 上的参数 (s,t) 使 (s,t) 为正交参数系

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址:中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026
电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

证明:

证明一个引理

引理: 设区域 $U\subset\mathbb{R}^2$, $f\,du+g\,dv$ 为 U 上可微的一阶微分形式, 则对任意 $P\in U$, 如果 $f(P), g(P)$ 不全为 0, 则存在 P 的邻域 $U\subset V$ 及 V 上光滑函数 K s.t. $\omega=K(f\,du+g\,dv)$ 在 V 上可积, i.e. 存在 V 上光滑函数 φ s.t. $\omega=d\varphi$.

证明: 不妨设 $P=(0,0)$, $g(0,0)\neq 0$

Step1: 考虑以 u,v 为未知函数, t 为自变量, x^2 为参数的常微分方程组初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=g(u,v)\\ \dfrac{dv}{dt}=-f(u,v)\\ u(0)=0\\ v(0)=x^2\end{cases}$$

由解对参数连续可微性, 该初值问题局部存在可微解 $u=u(t,x^2)$, $v=v(t,x^2)$. 令 $x^1=t$

则 $$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x^1,x^2)}\right|_{x^1=0}=\begin{vmatrix} g(0,x^2) & 0\\ -f(0,x^2) & 1\end{vmatrix}=g(0,x^2)\neq 0$$

由反函数定理, $(0,0)$ 附近 x^1, x^2 可以表示为 u,v 的可微函数 $x^1=x^1(u,v)$, $x^2=x^2(u,v)$

且 $$\frac{\partial}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^1}=g\frac{\partial}{\partial u}-f\frac{\partial}{\partial v}\qquad(*)$$

Step2: 设 K 为 P 附近可微函数, 由数学分析知 $K(f\,du+g\,dv)$ 在 P 附近可积的充要条件是

$$\frac{\partial(Kg)}{\partial u}=\frac{\partial(Kf)}{\partial v},\ \text{i.e.}\ \left(g\frac{\partial}{\partial u}-f\frac{\partial}{\partial v}\right)K=K\left(\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\right)\qquad(*)$$

现考虑偏微分方程 (**)，我们只需证明 (**) 有解 k.

事实上，由 (*) 知

$$(**) \Leftrightarrow \frac{\partial k}{\partial x^1} = k\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u}\right) := k\psi \qquad (***)$$

该方程一定有解，这是因为我们可以把 x^2 视为参数，将该常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{dt} = k\psi(t, x^2) \\ k(0) = 0 \end{cases}$$

由解对参数的连续可微性即得.

即 k 由偏微分方程 (**) 给出.

<u>回到原题</u>，令 $a = r_u - \dfrac{\langle r_u, r_v\rangle}{\langle r_v, r_v\rangle} r_v$，$b = r_v$，令 $A = \dfrac{\langle r_u, r_v\rangle}{\langle r_v, r_v\rangle}$.

则 a, b 为 S 上处处线性无关切向量场，且处处正交.

我们只需证明存在新参数 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ s.t. $r_{\tilde{u}} // a$，$r_{\tilde{v}} // b$.

Step 3：先寻找 $r_{\tilde{u}} // a$，$r_{\tilde{v}} // b$ 的等价条件.

$$\begin{cases} r_{\tilde{u}} // a \\ r_{\tilde{v}} // b \end{cases} \Leftrightarrow \exists \text{ 处处非零可微函数 } \lambda, \mu \text{ s.t. } \begin{cases} r_{\tilde{u}} = \lambda a = \lambda r_u - \lambda A r_v \\ r_{\tilde{v}} = \mu b = \mu r_v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ 处处非零可微函数 } \lambda, \mu \text{ s.t. } \begin{cases} r_u = \frac{1}{\lambda} r_{\tilde{u}} + \frac{A}{\mu} r_{\tilde{v}} \\ r_v = \frac{1}{\mu} r_{\tilde{v}} \end{cases} \qquad (****)$$

注意到 $\begin{cases} r_u = r_{\tilde{u}} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u} + r_{\tilde{v}} \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ r_v = r_{\tilde{u}} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial v} + r_{\tilde{v}} \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{cases}$.

$$(****) \Leftrightarrow \exists \text{ 处处非零可微函数 } \lambda, \mu \text{ s.t.}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda} & \dfrac{A}{\mu} \\ 0 & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix}. \qquad (*****)$$

Step 4: 我们证明存在处处非零函数 λ, μ s.t.

偏微分方程组 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{A}{\mu} \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}$ 有解

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址:中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026
电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

事实上，由引理得，存在非零函数 k 使得

$k(A\,du + dv)$ 可积，

令 $d\tilde{v} = k(A\,du + dv)$

同时令 $\tilde{u} = u$，

则 $\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & kA \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

取 $\lambda = 1$，$\mu = \frac{1}{k}$ 即可满足 (*****) 式.

证毕

2、证明：在曲面的任一点，任何两个相互正交的切方向法曲率之和为常数.

证明：设 $\{e_1, e_2\}$ 为 T_pS 上单位正交向量，

Weingarten 变换 $\mathcal{W}$ 在 $\{e_1, e_2\}$ 下矩阵为 $W = (w_j^i)_{2\times 2}$

i.e. $\mathcal{W}(e_1, e_2) = (e_1, e_2)W$.

则 $\sum_{i=1}^{2} k_n(e_i) = \sum_{i=1}^{2} \langle \mathcal{W}(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \langle w_j^i e_j, e_i \rangle$

$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} w_j^i \delta_i^j = \sum_{i=1}^{2} w_i^i = \mathrm{Tr}\,W$

3. 设曲面 S 由方程 $x^2+y^2-f(z)=0$ 给出，f 满足 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，

证明：S 在点 $(0,0,0)$ 处法曲率为常数.

证明：因为 $f'(0)\neq 0$，故存在 $f(0)$ 一个邻域 U 和 $g: f^{-1}(U) \to U$

s.t. g 为 f 的反函数，且 $g'(0) = g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} \neq 0$

故曲面S由方程 $z=g(x^2+y^2)$ 给定.

设曲面参数表示 $r(x,y)=(x,y,g(x^2+y^2))$

$r_x=(1,0,2xg'(x^2+y^2))$, $r_y=(0,1,2yg'(x^2+y^2))$

$r_{xx}(0)=(0,0,2g'(0))$, $r_{xy}(0)=0$, $r_{yy}(0)=(0,0,2g'(0))$

$n=(0,0,1)$

$(0,0,0)$处第一基本形式 $\mathrm{I}=dx^2+dy^2$, 第二基本形式 $\mathrm{II}=2g'(0)(dx^2+dy^2)$

故 $W=2g'(0)\mathrm{Id}$, 对单位向量 $v\in T_{(0,0,0)}S$

$k_n(v)=\langle W(v),v\rangle=2g'(0)$.

4. 定义 $\mathrm{III}=\langle dn,dn\rangle$ 为曲面第三基本形式, 证明 $K\mathrm{I}-2H\mathrm{II}+\mathrm{III}=0$

证明: 注意到 $W(dr)=-dn$, W 为自伴变换,

得 $\mathrm{III}=\langle dn,dn\rangle=\langle W(dr),W(dr)\rangle=\langle dr,W^2(dr)\rangle$

$\mathrm{II}=-\langle dr,dn\rangle=\langle dr,W(dr)\rangle$

$\mathrm{I}=\langle dr,dr\rangle$

注意到 $K=\det W$, $2H=\mathrm{Tr}W$

由 Cayley-Hamilton 定理知 $\varphi_W(W)=0$, φ_W 为 W 特征多项式

i.e. $W^2-(\mathrm{Tr}W)W+(\det W)\mathrm{Id}=0$

故 $\mathrm{III}-2H\mathrm{II}+K\mathrm{I}=0$

5. 设曲面 S_1 和 S_2 的交线 C 的曲率为 k, 曲线 C 在曲面 S_i 上的法曲率为 k_i $(i=1,2)$; 若沿 C, S_1 和 S_2 法向夹角为 θ, 证明:

$$k^2\sin^2\theta=k_1^2+k_2^2-2k_1k_2\cos\theta$$

证明: 设 n_i 为曲面 S_i 法向, n 为曲线 C 主法向

则 $k_i=\langle \frac{d^2r}{ds^2},n_i\rangle=k\langle n,n_i\rangle$

注意到 n, n_1, n_2 都与 t 垂直，故它们共面，

λ, μ s.t. $n = \lambda n_1 + \mu n_2$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

而 $\langle n, n\rangle = 1$ 得 [illegible]，i.e. $(\lambda\ \mu)\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = 1$ (*)

又 $k_1 = k\langle n, n_1\rangle = k(\lambda + \mu\cos\theta)$,

$k_2 = k\langle n, n_2\rangle = k(\mu + \lambda\cos\theta)$

i.e. $\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$

若 $k=0$，则 $k_1=k_2=0$，原式显然，

若 $\cos\theta = \pm 1$，则 $k_1 = \pm k_2$，原式显然，

下设 $k \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq \pm 1$，

于是 $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} = \frac{1}{k\sin^2\theta}\begin{pmatrix}1 & -\cos\theta\\ -\cos\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}$ (**)

(***) 代入 (*) 得 $\frac{1}{k^2\sin^2\theta}(k_1\ k_2)\begin{pmatrix}1 & -\cos\theta\\ -\cos\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix} = 1$

i.e. $k^2\sin^2\theta = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\theta$

6. 曲面 S 上一个切向称为渐近方向，如果沿此方向法曲率为0。S 上一条曲线 C 称为渐近线，如果它的切向均为渐近方向。证明：曲面 $S: r = r(u,v)$ 的参数曲线是渐近线当且仅当 $L=N=0$

证：注意到 $r(u) = r(u, v_0)$ 为 u 曲线，$\frac{dr}{du} = r_u(u, v_0)$ 为参数曲线的

$k_n\left(\frac{r_u}{|r_u|}\right) = 0 \Leftrightarrow \langle N(r_u), r_u\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle n_u, r_u\rangle = 0 \Leftrightarrow L = 0$

同理 $k_n\left(\frac{r_v}{|r_v|}\right) = 0 \Leftrightarrow N = 0$.