第五次习题课：

Ex26. 主曲率满足方程：$k^2 - \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}k + \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = 0$

判别式 $\Delta = \sqrt{(2H)^2-4K} = 2\sqrt{H^2-K}$　　H — 平均曲率.　K — Gauss曲率

① 在 $H^2-K\neq 0$ 的点附近：由于映射 $x\mapsto\sqrt{x}$ 在 $x>0$ 时是 C^∞ 的.
知 $\sqrt{H^2-K}$ 在一个邻域中 C^∞，从而 $k_1=\frac{1}{2}(2H+\sqrt{H^2-K})$ 与 $k_2=\frac{1}{2}(2H-\sqrt{H^2-K})$ 是 C^∞ 的

② $H^2-K=0$ 的点附近：由于在 $x=0$ 处 $x\mapsto\sqrt{x}$ 不可导，不能得到 k_1,k_2 可微.
只能由 $x\mapsto\sqrt{x}$ 的连续性得到 $\sqrt{H^2-K}$ 在这个点及其邻域中连续. 从而
k_1,k_2 在这个点附近连续.

Ex27.

(1). $\cancel{\tilde{r}_u\wedge\tilde{r}_v = (r_u+\lambda n_u)\wedge(r_v+\lambda n_v) = r_u\wedge r_v + \lambda r_u\wedge n_v + \lambda r_v\wedge n_u + \lambda^2 n_u\wedge n_v}$

$\cancel{= |r_u\wedge r_v|n + \lambda^2 K r_u\wedge r_v + \lambda r_u\wedge n_v + \lambda r_v\wedge n_u}$

$\cancel{= (1+\lambda^2 K)|r_u\wedge r_v|n + \lambda r_u\wedge n_v + \lambda r_v\wedge n_u}$

$\tilde{r}_u = r_u+\lambda n_u$

$\tilde{r}_v = r_v+\lambda n_v$ 都是切向量.

而 λ 又足够小. 从而 $\tilde{r}_u\wedge\tilde{r}_v\neq 0$.

~~由于 r_u, r_v, n_u, n_v 都是切向量. 故 $r_u\wedge n_v$, $r_v\wedge n_u$ 都平行于 n~~.

故 $\tilde{r}_u\wedge\tilde{r}_v$ 与 n 平行 $\Rightarrow$ $\tilde{n}=\pm n$　，不妨取 $\tilde{n}=n$.

(2). 设 ar_u+br_v 是对应于主曲率k的一个主方向，则 $-an_u-bn_v = k(ar_u+br_v)$

考虑由 $\tilde{r}$ 定义的 Weingarten 变换 $\tilde{W}$，则 $\tilde{W}(a(r_u+\lambda n_u)+b(r_v+\lambda n_v)) = -an_u-bn_v$.

$= kar_u+kbr_v$

(为什么?) ⟶ $= \frac{1}{1-\lambda k}(kar_u+ak\lambda n_u+kbr_v+b\lambda kn_v)$

$= \frac{k}{1-\lambda k}(a(r_u+\lambda n_u)+b(r_v+\lambda n_v))$

由此. 知 $\tilde{r}$ 的主曲率为 $\frac{k_1}{1-\lambda k_1}$ 与 $\frac{k_2}{1-\lambda k_2}$

故 $\tilde{K} = \frac{k_1k_2}{1-\lambda(k_1+k_2)+\lambda^2k_1k_2} = \frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$，　$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{1-\lambda k_1}+\frac{k_2}{1-\lambda k_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{2H-2\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K} = \frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}$

Ex28. γ是曲率线 $\Longleftrightarrow$ 在每一点的切向量是主方向

$\Longleftrightarrow$ $W\left(\frac{dr}{dt}\right) = \lambda\frac{dr}{dt}$　　for some λ

$\Longleftrightarrow$ $-\frac{dn}{dt} = \lambda\frac{dr}{dt}$　　for some λ

$\Longleftrightarrow$ $\frac{dn}{dt} \parallel \frac{dr}{dt}$

Ex29. u=常数是曲率线 $\Longleftrightarrow \frac{dr}{dv} \parallel \frac{dn}{dv} \Longleftrightarrow r_v \parallel n_v$ (*)

而 u=常数和 v=常数是曲率线 $\Rightarrow$ r_u 和 r_v 是主方向

(看下面的注) $\Rightarrow$ r_u 与 r_v 正交

$\Rightarrow F=0$

由 (*). $M = -\langle r_u, n_v \rangle = -\lambda \langle r_u, r_v \rangle = 0$.

故 $F=M=0$

反之. 若 $F=M=0$. $k_n(w) = \dfrac{L\xi^2 + N\eta^2}{E\xi^2 + G\eta^2}$ (书上 P49. (4.6)式).

$k_n(w)$ 的极值在 $\xi=0$ 和 $\eta=0$ 时取得. 也即 u=常数 和 v=常数这两个曲线在该点的切向量处取到. 故 u=常数 和 v=常数的切向量是主方向, 即它们是曲率线.

注: 在脐点处. 这个推理未必成立. 因此不妨假设所讨论的情形不涉及脐点.

Ex30. 设曲率线是 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

则 $\frac{dn}{dt} \parallel \frac{dr}{dt}$, 从而 $\frac{dn}{dt} \wedge \frac{dr}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right) \wedge r' = 0$.

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{F_x}{|\nabla F|}\right) & \frac{d}{dt}\left(\frac{F_y}{|\nabla F|}\right) & \frac{d}{dt}\left(\frac{F_z}{|\nabla F|}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Ex34. $r_u = (3 + 3v^2 - 3u^2, -6uv, 6u)$

$r_v = (6uv, 3v^2 - 3 - 3u^2, -6v)$

$r_{uu} = (-6u, -6v, 6)$

$r_{uv} = (6v, -6u, 0)$

$r_{vv} = (6u, 6v, -6)$

$r_u \wedge r_v = (36uv^2 - 18uv^2 + 18u + 18u^3, 36u^2v + 18v + 18v^3 - 18u^2v, (3v^2 - 3u^2)^2 - 9 + 36u^2v^2)$

$$\Rightarrow n = \left(2u,\ 2v,\ \frac{(u^2-v^2)^2-1+4u^2v^2}{u^2+v^2+1}\right)/\Delta$$

$$= (2u,\ 2v,\ u^2+v^2-1)/\Delta$$

$$\Delta = \left[4u^2+4v^2+(u^2+v^2-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = u^2+v^2+1$$

i.e. $n = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ \frac{2v}{u^2+v^2+1},\ \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right)$

这个N代表North pole

$\Rightarrow$ Gauss 映射的像集是 $S^2 \setminus N$（因为n恰好是S^2在球极投影坐标下的表示）

且 $E = 9(1+v^2-u^2)^2+36u^2v^2+36u^2 = 9(u^2+v^2+1)^2 = (3u^2+3v^2+3)^2$

$F = 18uv(1+v^2-u^2)+18uv(u^2+1-v^2)-36uv = 0.$

$G = 36u^2v^2+9(v^2-1-u^2)^2+36v^2 = (3u^2+3v^2+3)^2$

$L = [-12u^2-12v^2+6u^2+6v^2-6]/(u^2+v^2+1) = -6$

$M = 0$

$N = 6$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2} = 0.$$

Ex35. $r = (x,\ y,\ f(x)+g(y))$

$\Rightarrow r_x = (1,0,f')$, $r_y = (0,1,g')$, $r_x \wedge r_y = (-f',-g',1)$, $n = \left(\frac{-f'}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}, \frac{-g'}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}\right)$

$r_{xx} = (0,0,f'')$, $r_{xy} = 0$, $r_{yy} = (0,0,g'')$.

$\Rightarrow E = 1+f'^2$, $F = f'g'$, $G = 1+g'^2$, $L = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}$, $M = 0$, $N = \frac{g''}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}$

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{f''(1+g'^2)}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}} + \frac{g''(1+f'^2)}{\sqrt{1+f'^2+g'^2}}\right]/(1+f'^2+g'^2) = \frac{1}{2}(1+f'^2+g'^2)^{-\frac{3}{2}}\left(f''(1+g'^2)+g''(1+f'^2)\right)$$

$H=0 \Rightarrow f''(1+g'^2)+g''(1+f'^2)=0 \Rightarrow \frac{f''}{1+f'^2} = \frac{-g''}{1+g'^2}$ 左边与y无关，右边与x无关

$\Rightarrow \frac{f''}{1+f'^2} = \frac{-g''}{1+g'^2} = c$ 为一常数 $\Rightarrow f'(x) = \tan(cx+c_1)$, $g'(y) = -\tan(cy+c_2)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{-1}{c}\ln\cos(cx+c_1)+d_1$ $\quad g(y) = \frac{1}{c}\ln\cos(cy+c_2)+d_2$.

$$\Rightarrow z = f(x)+g(y) = \frac{1}{c}\ln\frac{\cos(cy+c_2)}{\cos(cx+c_1)} + d$$

故在相差一个常数与平移之下，有 $z = \frac{1}{c}\ln\frac{\cos(cy)}{\cos(cx)}$，c是常数