证明：直纹极小曲面是平面或正螺面.

证明：设 $r(u,v)=a(u)+v\,b(u)$.

- 不妨设 $|b(u)|=1$，否则令 $\tilde{u}=u$, $\tilde{v}=v|b(u)|$, $\tilde{b}(\tilde{u})=\frac{b(u)}{|b(u)|}$

  则 $r(\tilde{u},\tilde{v})=a(\tilde{u})+\tilde{v}\,\tilde{b}(\tilde{u})$ 且 $|\tilde{b}(\tilde{u})|=1$.

- 不妨设 $a'(u)\perp b(u)$，否则令 $\tilde{a}(u)=a(u)-\lambda(u)b(u)$,

  则 $\tilde{a}'(u)=a'(u)-\lambda(u)b'(u)-\lambda'(u)b(u)$

  $(\tilde{a}'(u),b(u))=(a'(u),b(u))-\lambda'(u)$

  取 $\lambda(u)=\int_0^u (a'(s),b(s))\,ds$.

  则 $r(u,v)=\tilde{a}(u)+(v+\lambda(u))b(u)$.

  令 $\tilde{u}=u$, $\tilde{v}=v+\lambda(u)$，则 $r(\tilde{u},\tilde{v})=\tilde{a}(\tilde{u})+\tilde{v}\,b(\tilde{u})$

  且 $(\tilde{a}'(\tilde{u}),b(\tilde{u}))=0$, $|b(\tilde{u})|=1$

- 不妨设 $|a'(u)|=1$，否则令 $\tilde{u}=u|a'(u)|$, $\tilde{v}=v$

  $\int_0^u |a'(s)|ds$

  则 $r(\tilde{u},\tilde{v})=a(\tilde{u})+\tilde{v}\,b(\tilde{u})$ 且 $\frac{da}{d\tilde{u}}=\frac{da}{du}\frac{du}{d\tilde{u}}=\frac{a(u)}{|a'(u)|}$

  $\left|\frac{da}{d\tilde{u}}\right|=1$, $\left(\frac{da}{d\tilde{u}},b(\tilde{u})\right)=0$, $|b(\tilde{u})|=1$.

综上，不妨设 $|b(u)|=1$, $|a'(u)|=1$ 且 $a'(u)\perp b(u)$.

$r_u=a'+vb'$, $r_v=b$, $n=\frac{(a'+vb')\wedge b}{|(a'+vb')\wedge b|}$, $F=0$, $G=1$

$r_{uu}=a''+vb''$, $r_{uv}=b'$, $r_{vv}=0$

$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}=0 \Rightarrow LG=2MF \Rightarrow (a''+vb'',a'+vb',b)=$

$\Rightarrow (a'',a',b)+v((b'',a',b)+(a'',b',b))+v^2(b',b',b)=0$

$\Rightarrow$
$$\begin{cases} (a'', a', b) = 0 & ① \\ (b'', a', b) + (a'', b', b) = 0 & ② \\ (b'', b', b) = 0 & ③ \end{cases}$$

设 $a(u)$ 的 Frenet 标架为 $\{a(u); T(u), N(u), B(u)\}$

由①，$k(N, T, b) = 0$

case1: $k = 0$

(a) $b' = 0$，则 b 为常向量，又 a 为常向量，故 $r(u,v)$ 为平面

(b) $b' \neq 0$，因为 $|b(u)| = 1$，则 $b(u)$ 为圆弧

$r(u,v)$ 为正螺面

case2: $k \neq 0$，则 $(N, T, b) = 0$，又 $T \perp b$，得 $b = \pm N$

不妨设 $b = N$，则 $b' = -kT + \tau B$，$b'' = -k'T + \tau' B - (k^2 + \tau^2)N$

由③，$k\tau' - \tau k' = 0$，i.e. $\frac{d}{du}\left(\frac{\tau}{k}\right) = 0$，$\frac{\tau}{k} = \text{const}$

由②，$\tau' = 0$，$\tau = \text{const}$.

(a) $\tau = 0$，则 $a(u)$ 为平面曲线，又 $b = N$，故 $r(u,v)$ 为平面.

(b) $\tau \neq 0$，则 $\tau = \text{const}$，$k = \text{const}$，$a(u)$ 为圆柱螺线.

不妨设 $a(u) = (r\cos u, r\sin u, du)$

则 $b = N = (-\cos u, -\sin u, 0)$

$r(u,v) = (0, 0, bu) + (a - v)(\cos u, \sin u, 0)$ 为正螺面.

Gauss曲率恒为0的直纹面称为可展曲面，证明：如果曲面的Gauss曲率恒为0且没有脐点，则它是可展曲面.

证明：

先讨论曲率线网. 设曲面S无脐点

设$r(u,v)$为曲面S的一个参数表示，称(u,v)为曲率线网，如果r_u, r_v都是主方向.

曲率线网的存在性：

设(u,v)为曲面S任意个参数表示，k_1, k_2是两个主曲率函数，由习题三26知k_1, k_2是光滑函数.

我们证明：$\forall p\in S$，$\exists$ p的邻域$U\subset S$及U上$\underbrace{v_1, v_2}_{\text{光滑切向量场}}$ s.t. $W(v_1)=k_1v_1$，$W(v_2)=k_2v_2$

事实上，$W\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$，$a,b,c,d$为光滑函数

设$W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$W-k_1I=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$，则$rank(W-k_1I)=1$

$\forall p\in S$，不妨设a'在U上恒不为0，U为p的一个邻域，于是$r_u-\frac{b'}{a'}r_v$为W属于特征值k_1的特征向量场且光滑.

令$v_1=r_u-\frac{b'}{a'}r_v$即可，同理可找到p邻域上的切向量场v_2 s.t. $W(v_2)=k_2v_2$

由第四次习题课的定理知$\exists$正交参数$(\tilde{u},\tilde{v})$ s.t.

$r_{\tilde{u}} // v_1$，$r_{\tilde{v}} // v_2$.

则$(\tilde{u},\tilde{v})$为曲率线网.

(注：曲率线网的r_u, r_v一定正交，因为它们属于Weigarten变换特征值不同的特征子空间)

回到原题，设(u,v)为曲率线网，$k_1\neq 0$，$k_2=0$.

$I=Edu^2+Gdv^2$，$II=k_1Edu^2+k_2Gdv^2=k_1Edu^2$

不妨设$|r_v|=1$（最后验证不妨设的合理性），i.e.

v曲线为弧长参数曲线

如果 $|r_v|\equiv 1$ 成立，则 $\langle r_{uv}, r_v\rangle=0$，$\langle r_{vv}, r_v\rangle=0$，

又 $F=\langle r_u, r_v\rangle=0$，得 $\langle r_{uv}, r_v\rangle+\langle r_u, r_{vv}\rangle=0$

故 $\langle r_u, r_{vv}\rangle=0$. 又 $\langle r_v, r_{vv}\rangle=0$，得 $r_{vv}\equiv 0$.

从而 $r(u,v)=a(u)+vb(u)$ 为直纹面.

下验证"不妨设". 先证 $|r_v|_u=0$.

令 $e_2=\dfrac{r_v}{|r_v|}$，则 $n_v=-k_2 r_v=0$，$n_u=-k_1 r_u$.

$\langle e_2, n\rangle=0 \Rightarrow \langle (e_2)_v, n\rangle=-\langle e_2, n_v\rangle=0$

$\langle (e_2)_u, n\rangle=-\langle e_2, n_u\rangle=k_1\langle e_2, r_u\rangle=0$

故 $\langle (e_2)_v, n\rangle_u-\langle (e_2)_u, n\rangle_v=0$

$\Rightarrow \langle (e_2)_v, n_u\rangle=0$

$\Rightarrow \langle (e_2)_v, r_u\rangle=0$.

$|e_2|^2=1 \Rightarrow \langle (e_2)_v, e_2\rangle=0$，故 $(e_2)_v=0$，$e_2=b(u)$.

$\langle e_2, r_u\rangle=0 \Rightarrow \langle (e_2)_v, r_u\rangle+\langle e_2, r_{uv}\rangle=0 \Rightarrow \langle e_2, r_{uv}\rangle=0$.

$|e_2|^2=1 \Rightarrow \langle (e_2)_u, e_2\rangle=0 \Rightarrow \left\langle \dfrac{r_{uv}}{|r_v|}+\left(\dfrac{1}{|r_v|}\right)_u r_v, e_2\right\rangle=0$

$\Rightarrow |r_v|_u=0$.

故 $|r_v|=f(v)$

令参数变换 $\begin{cases}\tilde{u}=u\\ \tilde{v}=\int_0^v f(s)\,ds\end{cases}$ 即可（则 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 为曲率线网 $|r_{\tilde{v}}|=1$）