5.3. 设曲面 $S: r(u,v)=(au, bv, \frac{au^2+bv^2}{2})$ 与 $\tilde{S}: \tilde{r}(\tilde{u},\tilde{v})=(\tilde{a}\tilde{u}, \tilde{b}\tilde{v}, \frac{\tilde{a}\tilde{u}^2+\tilde{b}\tilde{v}^2}{2})$

(1) 证明：当 $ab=\tilde{a}\tilde{b}$ 时，在对应 $(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$ 下，$S$ 与 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率相等

(2) $(a,b)$ 与 $(\tilde{a},\tilde{b})$ 满足什么关系时，$S$ 与 $\tilde{S}$ 有等距变换

(1)

$r_u=(a,0,au)$，$r_v=(0,b,bv)$，$n=\frac{(-u,-v,1)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$，$r_{uu}=(0,0,a)$，$r_{uv}=0$，$r_{vv}=(0,0,b)$

$\mathrm{I}=a^2(1+u^2)dudu+2abuvdudv+b^2(1+v^2)dvdv$

$\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(adudu+bdvdv)$

$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{1}{ab(1+u^2+v^2)^2}$，$\tilde{K}=\frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2}$

故当 $ab=\tilde{a}\tilde{b}$ 时，在对应 $(u,v)=(\tilde{u},\tilde{v})$ 下，$S$ 与 $\tilde{S}$ 的 Gauss 曲率相等

(2)

曲面 $S$: $r: D\longrightarrow \mathbb{R}^3$，曲面 $\tilde{S}$: $\tilde{r}: \tilde{D}\longrightarrow \mathbb{R}^3$

假设 $(0,0)\in D$ 或 $(0,0)\in\tilde{D}$.

因为 $S$ 与 $\tilde{S}$ 有等距变换 $\tilde{u}=\tilde{u}(u,v)$，$\tilde{v}=\tilde{v}(u,v)$，

故 $K=\tilde{K}$，$\frac{1}{ab(1+u^2+v^2)^2}=\frac{1}{\tilde{a}\tilde{b}(1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2)^2}$

令 $c=\frac{ab}{\tilde{a}\tilde{b}}>0$，则 $1+\tilde{u}^2+\tilde{v}^2=\sqrt{c}(1+u^2+v^2)$ ①

对 u 求导得

$$\begin{cases}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}=\sqrt{c}\,u & ②\\ \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}=\sqrt{c}\,v & ③\end{cases}$$

由此知 $(0,0)\in D \Leftrightarrow (0,0)\in\tilde{D}$.

故 $\tilde{u}(0,0)=0$，$\tilde{v}(0,0)=0$，代入①得 $c=1$，$ab=\tilde{a}\tilde{b}$.

① 对 $u,v$ 求导，② 对 $v$ 求导得

$$\begin{cases}(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u})^2+(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u})^2+\tilde{u}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial u^2}+\tilde{v}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial u^2}=1\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}+\tilde{u}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial u\partial v}+\tilde{v}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial u\partial v}=0\\ (\frac{\partial\tilde{u}}{\partial v})^2+(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial v})^2+\tilde{u}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial v^2}+\tilde{v}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial v^2}=1\end{cases}$$

令 $(u,v)=(0,0)$，则 $(\tilde{u},\tilde{v})=(0,0)$，于是在 $(u,v)=(0,0)$ 处，$\begin{pmatrix}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial u}\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial v}\end{pmatrix}$ 为正交阵，记

又 $\begin{pmatrix} a^2(1+u^2) & abuv \\ abuv & b^2(1+v^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}^2(1+\tilde{u}^2) & \tilde{a}\tilde{b}\tilde{u}\tilde{v} \\ \tilde{a}\tilde{b}\tilde{u}\tilde{v} & \tilde{b}^2(1+\tilde{v}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial\tilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}^T$

在 $(u,v)=(0,0)$ 处，$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \tilde{a}^2 & \\ & \tilde{b}^2 \end{pmatrix} J^T$

故 $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \tilde{a}^2 & \\ & \tilde{b}^2 \end{pmatrix}$ 正交相似，它们有相同特征值.

$(a^2,b^2)=(\tilde{a}^2,\tilde{b}^2)$ 或 $(a^2,b^2)=(\tilde{b}^2,\tilde{a}^2)$.

又 $ab=\tilde{a}\tilde{b}$，故 $(a,b)=(\tilde{a},\tilde{b})$ 或 $(a,b)=(\tilde{b},\tilde{a})$ 或 $(a,b)=(-\tilde{a},-\tilde{b})$ 或 $(a,b)=(-\tilde{b},-\tilde{a})$.

这四种情况下显然 $S$ 与 $\tilde{S}$ 有等距变换

5.8. 求沿着球面的赤道，切向量场的平行移动.

方法一： 设球面参数方程为 $r(u,v)=(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$

赤道参数方程为 $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, 0)$，$(u,v)=(0,t)$.

$a(t)=(-\sin t, \cos t, 0)$，$b(t)=(0,0,1)$ 构成 $T_{r(t)}S^2$ 的一组基.

设 $V(t)=\lambda(t)a(t)+\mu(t)b(t)$ 沿着赤道平行移动

则 $\frac{DV(t)}{dt}=\frac{dV(t)}{dt}-\langle\frac{dV(t)}{dt}, n(t)\rangle n(t)=0$

其中 $n(t)=-r(t)=(-\cos t, -\sin t, 0)$.

$\frac{dV(t)}{dt}=\lambda'(t)a(t)+\mu'(t)b(t)+\lambda(t)a'(t)+\mu(t)b'(t)$

$=(-\lambda'(t)\sin t-\lambda(t)\cos t, \lambda'(t)\cos t-\lambda(t)\sin t, \mu'(t))$

故 $(\lambda'(t)\sin t, \lambda'(t)\cos t, \mu'(t))=(0,0,0)$.

$\Rightarrow \lambda'(t)=\mu'(t)=0 \Rightarrow \lambda,\mu$ 为常数.

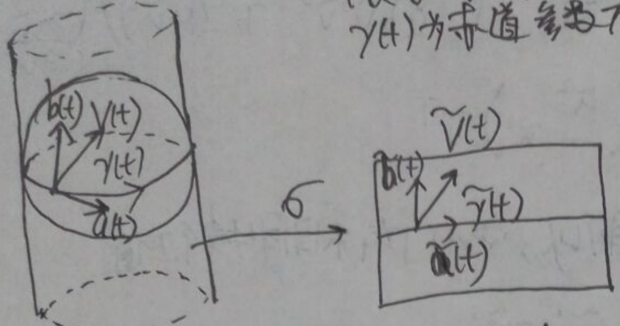
故如果 $V(0)=\lambda a(0)+\mu b(0)$,

则 $V(t)=\lambda a(t)+\mu b(t)$.

方法二： 设圆柱面与球面相切，且切线恰好为赤道，如图。

设 $\sigma$ 为圆柱面与平面之间的等距变换。

$\gamma(t)$ 为赤道参数方程




我们注意到以下事实

(1) 设曲面 $M_1$ 与 $M_2$ 相切，且切线恰好为曲线 $\gamma(t)$，$V(t)$ 为曲面 $M_1$ 沿 $\gamma(t)$ 的切向量场（因此也是曲面 $M_2$ 上沿 $\gamma(t)$ 的切向量场），则

$V(t)$ 在曲面 $M_1$ 上沿 $\gamma(t)$ 平行移动 $\Leftrightarrow$ $V(t)$ 在曲面 $M_2$ 上沿 $\gamma(t)$ 平行移动

$$\left(\frac{DV(t)}{dt}=\frac{dV(t)}{dt}-\left\langle\frac{dV(t)}{dt},n\right\rangle n\right)$$

(2) 设曲面 $S_1$ 与 $S_2$ 有等距变换 $\sigma: S_1\to S_2$，$\gamma(t)$ 为 $S_1$ 上一条正则曲线，$\tilde{\gamma}(t)=\sigma\circ\gamma(t)$，$V(t)$ 为曲面 $S_1$ 沿 $\gamma(t)$ 的切向量场，$\tilde{V}(t)=\sigma_*(V(t))$。则 $V(t)$ 沿 $\gamma(t)$ 平行移动 $\Leftrightarrow$ $\tilde{V}(t)$ 沿 $\tilde{\gamma}(t)$ 平行移动。

回到原题，$a(t)$，$b(t)$ 定义同方法一，

令 $\tilde{a}(t)=\sigma_*(a(t))$，$\tilde{b}(t)=\sigma_*(b(t))$

因为 $\tilde{V}(t)$ 沿 $\tilde{\gamma}(t)$ 平行移动保持与 $\tilde{a}(t)$ 夹角不变，

故 $V(t)$ 沿 $\gamma(t)$ 平行移动保持与 $a(t)$ 夹角不变，又 $|V(t)|$ 不变，

故 $V(t)=\lambda a(t)+\mu b(t)$，$\lambda,\mu$ 为常数

5.9. 设曲面 $S$ 的参数表示为 $r=r(u^1,u^2)$，证明：切向量场 $v=\frac{r_1}{\sqrt{E}}$ 沿曲线 $C:(u^1(t),u^2(t))$ 平行移动的充要条件是：沿着 $C$ 有 $\Gamma^2_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}=0$

证明：
$$\frac{Dv}{dt}=\frac{Dr_1}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}+r_1\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)=\Gamma^\beta_{1\alpha}r_\beta\frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}+r_1\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{E\sqrt{E}}\frac{d}{dt}E\right)$$
$$=\Gamma^\beta_{1\alpha}r_\beta\frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}-\frac{1}{E\sqrt{E}}r_1\left\langle\frac{Dr_1}{dt},r_1\right\rangle$$
$$=\Gamma^\beta_{1\alpha}r_\beta\frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}-\frac{1}{E\sqrt{E}}r_1\left(\Gamma^\beta_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}g_{1\beta}\right)$$
$$=\Gamma^1_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}r_1+\Gamma^2_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}r_2$$
$$-\Gamma^1_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{\sqrt{E}}r_1-\Gamma^2_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{F}{E\sqrt{E}}r_1$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{E}}r_2-\frac{F}{E\sqrt{E}}r_1\right)\Gamma^2_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}$$

故 $\frac{Dv}{dt}=0 \Leftrightarrow \Gamma^2_{1\alpha}\frac{du^\alpha}{dt}=0$.

5.10. 在球面 $r=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$ 上.

(1) 证明：曲线的测地曲率可以表示为

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\sin u\frac{dv}{ds}$$

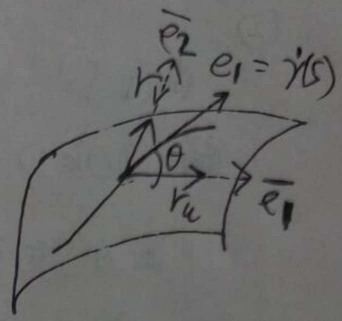
其中 $s$ 是曲线 $(u(s),v(s))$ 的弧长参数，$\theta$ 是曲线与经线（$u$ 线的夹角）；

(2) 求旋转面上纬线的测地曲率.

先推一遍 Liouville 公式.

(Liouville) 设 $r(u,v)$ 为曲面 $S$ 的一个正则参数表示 s.t. $(u,v)$ 为正交参数，$\gamma(s)=r(u(s),v(s))$ 为弧长参数曲线，设 $\dot\gamma(s)$ 与 $r_u$ 的夹角为 $\theta(s)$，则曲线 $\gamma(s)$ 的测地曲率为

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta.$$




Proof: 设 $e_1=\dot\gamma(s)$ 为曲面上沿曲线 $\gamma(s)$ 的切向量场

$e_2=n\wedge e_1$.

$\bar e_1=\frac{r_1}{\sqrt{E}}$, $\bar e_2=\frac{r_2}{\sqrt{G}}$.

则
$$\begin{cases} e_1=\cos\theta\,\bar e_1+\sin\theta\,\bar e_2\\ e_2=-\sin\theta\,\bar e_1+\cos\theta\,\bar e_2\end{cases}$$

$$k_g=\left\langle\frac{De_1}{ds},e_2\right\rangle=\left\langle\frac{D}{ds}(\cos\theta\,\bar e_1+\sin\theta\,\bar e_2),-\sin\theta\,\bar e_1+\cos\theta\,\bar e_2\right\rangle$$

$$=\left\langle-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}\bar e_1+\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\bar e_2+\cos\theta\frac{\omega_{12}}{ds}\bar e_2-\sin\theta\frac{\omega_{12}}{ds}\bar e_1,-\sin\theta\,\bar e_1+\cos\theta\,\bar e_2\right\rangle$$

$$=\frac{d\theta}{ds}+\frac{\omega_{12}}{ds}.$$

$$\omega_{12}=-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv.$$

又 $\dot\gamma(s)=e_1=\cos\theta\,\bar e_1+\sin\theta\,\bar e_2$

$\dot\gamma(s)=\frac{d}{ds}r(u(s),v(s))=r_u\frac{du}{ds}+r_v\frac{dv}{ds}=\sqrt{E}\frac{du}{ds}\bar e_1+\sqrt{G}\frac{dv}{ds}\bar e_2$

故 $\cos\theta=\sqrt{E}\frac{du}{ds}$, $\sin\theta=\sqrt{G}\frac{dv}{ds}$,

$$k_g=\frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta.$$

(1) $E = a^2,\ F=0,\ G = a^2\cos^2 u$

$\sin\theta = a\cos u \dfrac{dv}{ds}$, $\dfrac{\partial \ln G}{\partial u} = \dfrac{-2\sin u}{\cos u}$,

故 $k_g = \dfrac{d\theta}{ds} - \sin u \dfrac{dv}{ds}$

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $k_g = -\sin u \dfrac{dv}{ds}$

5.11. 求旋转曲面上纬线的测地曲率.

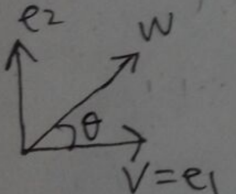
解: 设 $r(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$

$E = (f')^2+(g')^2,\ F=0,\ G=f^2,\ \theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{d\theta}{ds}=0$

$k_g = \dfrac{1}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial \ln G}{\partial u} = \dfrac{f'}{f}\dfrac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$

5.13. 设 $S$ 是 $E^3$ 的曲面，$n$ 是 $S$ 的单位法向量场，$r(t)$ 是曲面 $S$ 上的正则曲线. 若 $v=v(t), w=w(t)$ 是沿曲线 $r(t)$ 曲面的单位切向量场，$\theta$ 是 $v$ 和 $w$ 的夹角，证明：$\langle \dfrac{Dw}{dt}, n\wedge w\rangle - \langle \dfrac{Dv}{dt}, n\wedge v\rangle = \dfrac{d\theta}{dt}$.

证明: 设 $w$ 与 $e_1$ 夹角为 $\theta$, $e_1 = v$.




$e_2 = n\wedge e_1$, $w = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$

$\langle \dfrac{Dw}{dt}, n\wedge w\rangle - \langle \dfrac{Dv}{dt}, n\wedge v\rangle$

$= \langle \dfrac{D}{dt}(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), \cos\theta e_2 - \sin\theta e_1\rangle$

$- \langle \dfrac{De_1}{dt}, e_2\rangle$

$= \langle -\sin\theta \dfrac{d\theta}{dt} e_1 + \cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} e_2 + \cos\theta \dfrac{De_1}{dt} + \sin\theta\dfrac{De_2}{dt}, \cos\theta e_2 - \sin\theta e_1\rangle$

$- \langle \dfrac{De_1}{dt}, e_2\rangle$

$= \dfrac{d\theta}{dt} + \cos^2\theta\langle \dfrac{De_1}{dt}, e_2\rangle - \sin^2\theta\langle \dfrac{De_2}{dt}, e_1\rangle - \langle \dfrac{De_1}{dt}, e_2\rangle$

$= \dfrac{d\theta}{}$

5.14. 设曲线C是旋转面 $r(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ 上的一条测地线，$\theta$ 是曲线C与经线的夹角，证明沿C有 $f(u)\sin\theta=$ 常数

证明：

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{2\sqrt{G}}\dfrac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta - \dfrac{1}{2\sqrt{E}}\dfrac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta \\ \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\cos\theta \\ \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\sin\theta \end{cases}$$

$E=(f')^2+(g')^2,\ G=f^2.\qquad \dfrac{\partial \ln E}{\partial v}=0,\ \dfrac{\partial \ln G}{\partial u}=\dfrac{2f'}{f}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{-f'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\sin\theta \\ \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{du} = -\frac{f'}{f}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow -\cot\theta\, d\theta = d(\ln f)$$

$$\Rightarrow -d(\log\sin\theta) = d(\ln f)$$

$$\Rightarrow f(u)\sin\theta = \text{const}.$$

5.16. 设曲面的第一基本形式为 $I=dudu+G(u,v)dvdv$，且 $G(0,v)=1$，$G_u(0,v)=0$，证明：$G(u,v)=1-u^2K(0,v)+o(u^2)$

证明：$G(u,v)=G(0,v)+G_u(0,v)u+\frac{1}{2}G_{uu}(0,v)u^2+o(u^2)$

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v+\left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right)=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

$$=-\frac{G_{uu}}{2G}-\frac{1}{4}\frac{G_u^2}{G^2}$$

$$\Rightarrow G_{uu}(0,v)=-2K(0,v)$$

~~$\langle \frac{\partial}{\partial u}, e_2\rangle$~~

$$\Rightarrow G(u,v)=1-u^2K(0,v)+o(u^2)$$

5.18. 设曲面S上以点P为中心，r为半径的测地圆的周长为$L(r)$，所围区域面积为$A(r)$，证明：P点的Gauss曲率

$$K(p)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L(r)}{r^3}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2-A(r)}{r^4}$$

证明：取测地极坐标系 $r(\rho,\theta)$，$I=d\rho d\rho+G(\rho,\theta)d\theta d\theta$

$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$，$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$

$(\sqrt{G})_{\rho\rho}=-K\sqrt{G}$，$(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}=-K_\rho\sqrt{G}-K(\sqrt{G})_\rho$

$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho}=0$，$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_{\rho\rho\rho}=-K(p)$

$$L(r)=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(r,\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{G(0,\theta)}+(\sqrt{G(0,\theta)})_\rho r+\frac{1}{2}(\sqrt{G(0,\theta)})_{\rho\rho}r^2+\frac{1}{6}(\sqrt{G(0,\theta)})_{\rho\rho\rho}r^3+o(r^3)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}r-\frac{1}{6}K(p)r^3+o(r^3)\,d\theta$$

$$=2\pi r-\frac{\pi}{3}K(p)r^3+o(r^3)$$

$$\Rightarrow K(p)=\lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r-L(r)}{r^3}$$

$$A(r)=\int_0^r L(s)ds=\pi r^2-\frac{\pi}{12}K(p)r^4+o(r^4)$$

$$\Rightarrow K(p)=\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2-A(r)}{r^4}$$

5.19. 在常Gauss曲率曲面上，测地圆有常测地曲率.

证：$(\sqrt{G})_{\rho\rho}+K(\sqrt{G})_\rho=0$，因为K为常数，$(\sqrt{G})(0,\theta)=0$，$(\sqrt{G})_\rho(0,\theta)=1$

故 $\sqrt{G}$ 是$\rho$的函数．测地圆为$\theta$曲线

$k_g=\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial\rho}$．只与$\rho$有关.

故测地圆有常测地曲率

5.20. 证明：若曲面上有两族测地线相交定角，则曲面是可展曲面

证明： 设 $r(u,v)$ 为曲面的正交参数表示 s.t. $v$-曲线为测地线其中一族.

由Liouville公式 $0 = k_g = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}$.

$\Rightarrow G = G(v)$.

设另一族测地线与 $u$-曲线夹角为 $\theta$，对其中任意一条，有

$$0 = k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta$$

又 $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$， $E = E(u)$

$I = E(u)\,du\,du + G(v)\,dv\,dv$,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left( \left(\frac{\sqrt{E(u)}_v}{\sqrt{G(v)}}\right)_v + \left(\frac{\sqrt{G(v)}_u}{\sqrt{E(u)}}\right)_u \right) = 0.$$

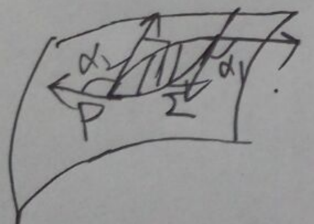
故曲面为可展曲面.

5.21. 设 $r: D \to E^3$ 是一张曲面，$D$ 是单连通区域，$r$ 的Gauss曲率 $K<0$.

证明：从 $D$ 内一点出发的两条测地线不会相交于 $D$ 中另一点，

证明： 若不然，设从 $P$ 点出发的两条测地线第一次相交于 $Q$ 点，

这两条测地线围成一个二边形 $\Sigma$，如图.




由Gauss-Bonnet公式

$$\int_\Sigma K\,dA + \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi,$$

又 $K<0$，故 $\alpha_1 + \alpha_2 > 2\pi$

这与 $0 \le \alpha_1 \le \pi$，$0 \le \alpha_2 \le \pi$ 矛盾.