HW12.

1. 求共轭点的重数 在 S^n 上.

(1). 已知 q 对径点 是 p 的共轭点.

为求其重数. 我们考虑非平凡 Jacobi 场的维数.

令 $\gamma(t)$ 是一个正交标架场 在 p 点.

任取一条测地线连接 p 和 q. 平行移动 e_i 得到 $E_i(t)$. 其中 $e_1 = \gamma'(0)$ $E_1(t) = \gamma'(t)$.

因为我们考虑的是 在 p 点 消失的 Jacobi 场 且处处垂直于 $\gamma'(t)$.

故我们可设. $J(t) = \sum_{i=2}^{n} \left(c_i \sin t\, E_i(t) + d_i \cos t\, E_i(t) \right)$

$J(0) = 0 \Rightarrow d_i = 0$. 因此.

$$J(t) = \sum_{i=2}^{n} c_i \sin t\, E_i(t).$$

显然 $J(\pi) = 0$.

这告诉我们 $J(0) = J(\pi) = 0$ 的 非平凡 Jacobi 场 至少 可达到 $n-1$ 个.

但是我们又知道 重数不可能超过 $n-1$ 个.

于是我们有 $\text{multiplicity}(q) = n-1$.

Method II

由曲线特性 我们考虑以下两种情形：

Case 1. $w = v$. 令 $\gamma(t) = \exp_p tv$. 则有

$$(d\exp_p)_v(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \exp_p(tv) = \dot\gamma(1).$$

$$\Rightarrow \langle v, w\rangle = |v|^2 = |\dot\gamma(0)|^2 = |\dot\gamma(1)|^2 = |(d\exp_p)_v(v)|^2$$

Case 2. $w \perp v$. 令 $\gamma(s)$ 是 T_pM 中以 $|v|$ 为半径的球面的曲线. s.t.

$$\gamma(0) = v, \quad \dot\gamma(0) = w$$

令 $A = \{(t,s) \mid 0<t<1,\ -\varepsilon<s<\varepsilon\}$.

考虑如下的变分. $f: A \to M$.

$$(t,s) \longmapsto \exp_p t\gamma(s) = \gamma(t, p, \gamma(s))$$

我们有 $f(t,0) = \gamma(t)$.

$$f_t(1,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=1} \exp_p(tv) = (d\exp_p)_v(v)$$

$$f_s(1,0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(\gamma(s)) = (d\exp_p)_v(w)$$

$$\Rightarrow \langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w)\rangle = \langle f_t(1,0), f_s(1,0)\rangle$$

现在. $\frac{\partial}{\partial t}\langle f_t, f_s\rangle = \langle \frac{D}{\partial t} f_t, \frac{\partial f}{\partial s}\rangle + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\langle f_t, f_t\rangle$

note $|f_t|^2 = |\gamma(s)|^2 = 1$. geodesics

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\langle f_t, f_s\rangle = 0$. 是常数.

$$\lim_{t\to 0} f_s(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{d}{ds}\exp_p(t\gamma(s)) = \lim_{t\to 0} (d\exp_p)_{tv}(tw) = 0.$$

$$\Rightarrow \langle f_t(1,0), f_s(1,0)\rangle = 0.$$

HW13.

Set $f(t) = |\bar{v}(t)|$. 则有

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{\langle \dot{\bar v}(t), \bar v(t)\rangle}{|\bar v(t)|}.$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \frac{\langle \ddot{\bar v}(t), \bar v(t)\rangle + \langle \dot{\bar v}(t), \dot{\bar v}(t)\rangle}{|\bar v(t)|} - \frac{\langle \dot{\bar v}(t), \bar v(t)\rangle^2}{|\bar v(t)|^3}$$

$$\geq \frac{-\langle R(\dot\gamma, \bar v)\dot\gamma, \bar v\rangle}{\bar v(t)} \geq -\beta|\bar v(t)| = -\beta f(t)$$

~~Here we have appli~~

这里我们应用了 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\frac{\langle \dot{\bar v}(t), \bar v(t)\rangle^2}{|\bar v(t)|^3} \leq \frac{|\bar v(t)|^2 |\dot{\bar v}(t)|^2}{|\bar v(t)|^3}$$

Set $g(t) = \frac{1}{\sqrt\beta}\sin\sqrt\beta t$ 我们有

$$f'' \geq -\beta f(t), \quad g'' = -\beta g$$

$$\Rightarrow \quad gf'' - fg'' \geq 0 \Rightarrow \int_0^t (gf' - fg')' \, ds \geq 0.$$

i.e. $\quad g(t) f'(t) \geq f(t) g'(t)$

$$\Rightarrow \int_\varepsilon^t \frac{f'(s)}{f(s)} ds \geq \int_\varepsilon^t \frac{g'(s)}{g(s)} ds \Rightarrow \log\frac{f(t)}{f(s)} \geq \log\frac{g(t)}{g(s)}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{f(t)}{g(t)}} \; f(t) \geq \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} g(t), \quad \forall\, 0<\varepsilon<1.$$

~~Now~~ 我们令 $\varepsilon \to 0^+$ 我们有

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \cancel{\frac{f(0)}{g(0)} \frac{f'(0)}{g'(0)}} =$$

$$= \lim_{s\to0^+} \frac{|f(s)|^2}{|g(s)|^2} = \lim_{s\to0^+} \frac{\langle \dot{\bar v}(t), \bar v(t)\rangle}{\frac{1}{\sqrt\beta}\sin\sqrt\beta t\cos\sqrt\beta t} = \lim_{s\to0^+} \frac{\langle \ddot{\bar v}(t), \bar v(t)\rangle + |\dot{\bar v}(t)|^2}{\cos 2\sqrt\beta t} = 1.$$

(2). 考虑测地变分 $\alpha(s,t) = \exp_{p_0} \frac{t}{r}(p+sX)$. $X = \frac{d}{d\theta}(r,\theta)$.

张出的变分场 $U(t) = (d\exp_{p_0})_{\frac{t}{r}p} \frac{t}{r}X = \frac{t}{r}(d\exp_{p_0})_{\frac{t}{r}p} X$

特别地. 在 $t=r$ 处. 我们有

$$U(r) = (d\exp_{p_0})_p X.$$

由(1) 我们有 $|U(r)| \geq \begin{cases} r & \beta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\beta}}\sinh\sqrt{-\beta}\,t & \beta < 0 \end{cases}$

从而我们有 $\int_0^{2\pi} \|(d\exp_{p_0})_p \frac{d}{d\theta}\| \, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} |U(r)| \, d\theta \geq \begin{cases} 2\pi r & \beta = 0 \\ \frac{2\pi}{\sqrt{-\beta}}\sinh\sqrt{-\beta}\, r & \beta < 0 \end{cases}$$

当 $\beta > 0$ 时. 因为 γ 可能有共轭点 当 ~~$r \geq \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$~~ 时 我们不能直接利用(1). 但是当 ~~$r < \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$~~ 时 γ 没有共轭点

从而 $\exp_{p_0}: B(\frac{\pi}{\sqrt{\beta}}) \to M$ 是微分同胚

且对 $r < \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}$. γ 无共轭点. 所以.

$$C(r) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}\sin\sqrt{\beta}\, r \qquad \forall\, r < \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

HW14.

~~首先由 Thm 9. 则我们可以找到一个等距 φ.~~

~~s.t. $\varphi(p_1) = q_1$, $(d\varphi)_{p_1}(e_i) = e_i'$~~

~~由其中 $\{e_i\}$, $\{e_i'\}$ 是一个正交基 在 p_1, q_1 点~~

~~claim: $\varphi(p_2) = q_2$.~~

~~由 令 $\gamma(t)$ 是这样一条测地线 连接 p_1, p_2~~

~~s.t. $\gamma'(0) = e_1$,~~

~~令 $\tilde{\gamma}(t)$ 是 连接 q_1, q_2 的一条测地线 q_1, q_2~~

~~s.t. $\tilde{\gamma}'(0) = e_1'$.~~

~~由 Thm 9.~~

HW14. $\forall\, p_1, p_2, q_1, q_2 \in M$.

令 $\gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$ 是分别为连接 p_1, p_2, q_1, q_2 的测地线

设 $\{e_i\}$, $\{e_i'\}$ 是一个正交基 的在 p_1, q_1 处

由 Thm 9. $\exists$ 这样的一个等距 φ. s.t.

$$\varphi(p_1) = q_1, \quad (d\varphi)_{p_1}(e_i) = e_i'$$

特别地 $(d\varphi_p)(e_1) = e_1'$

而 $\varphi\circ\gamma(0) = q_1$, $\frac{d}{dt}(\varphi\circ\gamma(t))\big|_{t=0} = (d\varphi)_{p_1}(e_1) = e_1'$

所以 $\varphi\circ\gamma = \tilde{\gamma}$ 特别地 $\varphi\circ\gamma(a) = \varphi(p_2) = \tilde{\gamma}(a) = q_2$.

$a = d(p_1, p_2) = d(q_1, q_2)$.

$\square$