(0) 课程信息

刘世平

Email: spliu@ustc.edu.cn Office: 1611.

课程成绩：作业平时 40% 期中考试 30%

期末考试 30%

参考书：① 主参考：伍鸿熙 沈纯理 虞言林

黎曼几何初步

② 忻元龙 黎曼几何讲义 | Jost. Riemannian geom. and geometric analysis

③ do Carmo Riemannian Geometry

④ Petersen Riemannian Geometry.

⑤ 白正国 沈一兵 水乃翔 郭孝英 黎曼几何初步

助教：桂耀廷

Email: vigney@mail.ustc.edu.cn

作业每两周一次，教学第4周周四交（第一次3月9号）

习题课每两周一次. 教学第4，6，…周周六（第一次3月11号）

（地点待定）

主要内容：-黎曼度量、联络、曲率张量

-测地线：指数映射，Hopf-Rinow，Jacobi场，变分公式，指标形式

-曲率和拓扑：Cartan-Hadamard, Bonnet-Myers

比较定理

我们从一个在每点处可度量切向量长度的光滑流形开始.

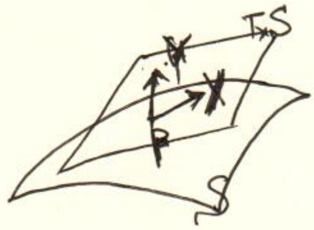
Hausdorff

具可列基.

(I) Riemannian Metric 黎曼度量 (1)

2017.2.20.

§1 定义



$\langle X,Y\rangle$ ← $\mathbb{R}^3$ 中内积

可以用来计算曲面中曲线的长度，曲面中区域的面积. (积分 velocity 向量)

$\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 对应于一个二次型 I_p，即曲面的第一基本形式 (the first fundamental form of S at p).

~~定义~~ M^n — 光滑(C^∞)流形，n维.

定义1. M上一个黎曼度量g是一个"C^∞指定"(assignment). "指定"是指对于M的每一个切向量空间，T_pM, $p\in M$，指定 T_pM 的一个向量内积 $g_p(\cdot,\cdot)=\langle\cdot,\cdot\rangle_p$，且这个内积在下列意义下光滑依赖于p.

(对称，正定，双线性形)

~~Remark: 1. 光滑依赖于p是指~~ 如果 X, Y 是两个在一个开集 $U\subset M$ 上光滑的向量场，则 $f(p):=\langle X_p,Y_p\rangle_p=g_p(X_p,Y_p)$ 是 U上的光滑函数. (的开集)

局部坐标表示：设U为p的坐标邻域，其坐标函数记为 $\{x^1,\cdots,x^n\}$.

切向量空间 T_pM 由 $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 张成 (坐标曲线的切向量)

其对偶的余切向量空间 T_p^*M 由 $\{dx^1,\cdots,dx^n\}$ 张成

那么我们记

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle_p := g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(p) =: g_{ij}(p)$$

对任意U上光滑向量场 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y=Y^j\frac{\partial}{\partial y^j}$

[(Einstein 和式约定)：如果指标 i 作为上、下指标~~出现两次~~重复出现，则在其取值范围内作和.]

$$\langle X_p, Y_p\rangle_p = X^i(p)Y^j(p)\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle_p = g_{ij}(p)X^i(p)Y^j(p).$$

所以局部地，我们有

$$g = g_{ij}dx^i\otimes dx^j.$$

① "$g_p(\cdot,\cdot)$ 光滑依赖于 p" $\Leftrightarrow$ $\forall\, ij$ $g_{ij}(p)$ 在 p 处光滑

② "$g_p(\cdot,\cdot)$ 是内积"

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} g_{ij}=g_{ji}, \text{ 矩阵 } (g_{ij}(p)) \text{ 在任一 } p \text{ 处对称} \\ \text{矩阵 } (g_{ij}(p)) \text{ 在任一 } p \text{ 处均正定的。} \end{cases}$

~~在每一点都~~ ~~处处~~正定的

定义1. M上的一个黎曼度量 g 是一个光滑的、对称的、$(0,2)$-张量场. (二阶共变张量场)

M上的一个黎曼度量 g 是一个光滑的二阶共变张量场，且有如下性质：对任意向量场 X, Y，有 $g(X,Y)=g(Y,X)$ ，$g(X,X)\geq 0$，& $g_p(X,X)=0 \Leftrightarrow X(p)=0$.

定义2. 设 g 为 C^∞ 流形 M上的一个黎曼度量。我们称 (M,g) 为一个黎曼流形.

§2 例子

(1) $M=\mathbb{R}^n$, $\forall p\in\mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}^n$上~~标准的黎曼度量 g_0~~.

$\mathbb{R}^n$ 上的标准内积给出一个标准的黎曼度量

$$g_0(X,Y)=\sum_i X^iY^i = X^TY.$$

或者：$\mathbb{R}^n$ 只被一个坐标邻域 $(x^1, \cdots, x^n)$ 覆盖

矩阵 $(g_{ij}) = (\delta_{ij})$ 单位阵.

张量：$g = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$.

更一般地，$(g_{ij}) = A = (a_{ij})$ 任一正定 $n \times n$ 对称阵.

$$g = a_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

$$g(X, Y) = X^T A Y.$$

(2) <u>诱导度量</u>：$f: M^n \longrightarrow N^{n+k}$ 光滑 浸入 (immersion),

(i.e. $df_p : T_pM \longrightarrow T_pN$ 对任一 $p \in M$ 都是单射)

(N, g_N) 是一黎曼流形

可以定义在M上定义拉回度量 (pull-back metric) $f^* g_N$ 如下

$$(f^* g_N)_p (X_p, Y_p) = (g_N)_{f(p)} (df_p(X_p), df_p(Y_p))$$

可以验证 $f^* g_N$ 为 M上的黎曼度量. ($(f^* g_N)_p (X, X) = 0$

$\underset{(g_N)_{f(p)}\text{为黎曼度量}}{\Rightarrow} df_p(X_p) = 0 \underset{df_p\text{单射}}{\Rightarrow} X_p = 0$)

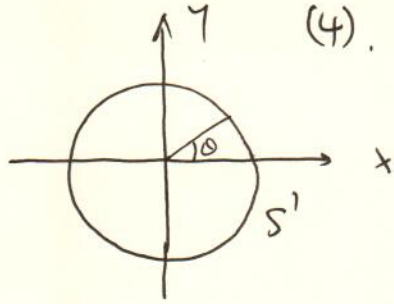
定义 我们称 $f^* g_N$ 为 M上关于 f 的<u>诱导度量</u>.

一个特别情形是：(N, g_N) 一黎曼流形
$M \subset N$ 是一个浸入子流形.

这时包含映射 (inclusion map) $i: M \longrightarrow N$ 是一个浸入.

因此M上有诱导度量 $i^* g_N$

在这种情形下，$(i^* g)_p$ 是 $(g_N)_p$ 在 $T_pM \subset T_pN$ 上的限制.



例子: $M=S^1$ $\mathbb{R}^2$中单位圆.

选一个坐标邻域: 用 θ 参数化 S^1:

$$x = \cos\theta$$
$$y = \sin\theta$$

$0<\theta<2\pi$.

那么我们有 $dx = -\sin\theta\, d\theta$, $dy = \cos\theta\, d\theta$

从而 S^1上的诱导度量为

$$g_{S^1} = (dx\otimes dx + dy\otimes dy)|_{S^1}$$
$$= \sin^2\theta\, d\theta\otimes d\theta + \cos^2\theta\, d\theta\otimes d\theta = d\theta\otimes d\theta.$$

例子: $M=S^2$ $\mathbb{R}^3$中 2-球

选一个坐标邻域: 用 θ 和 z 参数化 S^2

$$x=\sqrt{1-z^2}\cos\theta,\quad y=\sqrt{1-z^2}\sin\theta,\quad z=z$$

$0<\theta<2\pi$, $-1<z<1$

那么我们有诱导度量

$$g_{S^2} = \frac{1}{1-z^2}\, dz\otimes dz + (1-z^2)\, d\theta\otimes d\theta.$$

(Exercise)

任一 n维球面 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2=1\}$ 上有 $\mathbb{R}^{n+1}$上黎曼度量 g_0 的诱导度量.

(3) 乘积度量 (product metric)

(M, g_M), (N, g_N) 黎曼流形

$M\times N$ Cartesian product.

设 $\pi_1: M\times N \to M$, $\pi_2: M\times N\to N$ 为自然投影

则 $M\times N$ 上有乘积度量 g 如下 (5)

$\forall\ (p,q)\in M\times N$, ~~X, Y 向量场~~ $\forall\ X, Y\in T_{(p,q)}(M\times N)$

$$g_{(p,q)}(X,Y) := (g_M)_p(d\pi_1 X, d\pi_1 Y) + (g_N)_q(d\pi_2 X, d\pi_2 Y).$$

例如 环面 $T^n = S^1\times\cdots\times S^1$. 取 $S^1\subset\mathbb{R}^2$ 上诱导度量 g_{S^1} 的乘积度量 g_{T^n}. (T^n, g_{T^n}) 称为平坦环面 (flat torus).

(4) 设 $B^n = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<1\}$ 为单位实心开球. 其上可定义 Riemann 度量

$$g = \frac{4}{\left[1-\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right]^2}\sum_{i=1}^n dx^i\otimes dx^i .$$

单位球的 Poincaré 度量.

§3. 两个 Riemannian 流形何时"等价"

定义: 设 (M, g_M), (N, g_N) 为 Riemannian 流形. 一个微分同胚 (diffeomorphism) $\varphi: M\longrightarrow N$, ~~称为一个等距变换~~, 如果
(i.e. φ 是 C^∞ bijection, 且 φ^{-1} 也 C^∞)

$$\varphi^* g_N = g_M.$$

i.e. $(g_M)_p(X,Y) = (g_N)_{\varphi(p)}(d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y))$, $\forall\ p\in M$
$\forall\ X, Y\in T_pM$.

则称 φ 为一个等距变换

局部等距变换: ~~一个 C^∞ 映射 $\varphi: M\to N$ 称为一个局部等距变换~~ 如果 $\forall\ p\in M$, $\exists$ p 的邻域 $U\subset M$, 使得

$$\varphi: U\to\varphi(U)$$

是微分同胚且 $\varphi^* g_N = g_M$

§4. 黎曼度量的存在性

~~的~~ <u>定理1</u>. 光滑流形 M (Hausdorff, 有可数基) 上总存在一个黎曼度量.

<u>证明</u>: 取 M 的一个局部有限的坐标图册 $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$

在每一个 U_α 上, 可取一个黎曼度量

$$g_\alpha = \sum dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$$

存在一个附属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\phi_\alpha\}$.

这样, 在 M 上~~的黎曼度量定义为~~ 定义.

$$g = \sum_\alpha \phi_\alpha g_\alpha$$

注意, 在每个点 $p \in M$ ~~附近的小邻~~ 可取坐标邻域 (U, x^i), 使其闭包紧. 由 $\{U_\alpha\}$ 的局部有限性可知 U 只与有限个 $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_\gamma}$ 相交. 因此 g 限制在 U 上成为

$$g = \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \phi_{\alpha_\lambda} g_{\alpha_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \phi_{\alpha_\lambda} \sum_i dx_{\alpha_\lambda}^i \otimes dx_{\alpha_\lambda}^i$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \phi_{\alpha_\lambda} \sum_i \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^i}{\partial x^l} dx^k \otimes dx^l \quad (k, l \text{ 为 Einstein 和})$$

$$= \left(\sum_{\lambda=1}^{\gamma} \sum_i \phi_{\alpha_\lambda} \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x_{\alpha_\lambda}^i}{\partial x^l} \right) dx^k \otimes dx^l$$

$$:= g_{kl}\, dx^k \otimes dx^l$$

只须再证 (g_{kl}) 是正定的. 由 $0 \le \phi_\alpha \le 1$, $\sum \phi_\alpha = 1$ 知存在 β 使 $\phi_\beta(p) > 0$. 因此

$$g(p) \ge \phi_\beta(p) g_\alpha > 0.$$

□

证明：(do Carmo书) 设 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的由坐标邻域构成的一个

① 局部有限覆盖，即 $\forall p\in M$ 有邻域 U 使得 $U\cap U_\alpha \neq \phi$ 至多对有限多 α 成立.

$\{\phi_\alpha\}$ 是从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 C^∞ 类单位分解.

② 1) $\phi_\alpha \geq 0$，$\phi_\alpha = 0$ on $M\setminus\overline{U_\alpha}$

2) $\sum_\alpha \phi_\alpha(p) = 1$，$\forall p\in M$. (U_α, x_α^i) $= \sum dx_\alpha^i \otimes dx_\alpha^i$ $\varphi_\alpha^* g_0$

在每一个 U_α 上可定义 $g_\alpha(\cdot,\cdot)$ 为由坐标映射诱导的黎曼度量 g

定义 $g_p(X,Y) := \sum_\alpha \phi_\alpha(p)\,(g_\alpha)_p(X,Y)$，$\forall p\in M$，$X,Y\in T_pM$.

~~因为~~ 注意上式为有限和

$\exists \beta$ s.t. $\phi_\beta(p)>0$ 故 g_p 正定.

所以 g_p 为黎曼度量 □

(主要是正定性)

注1. 也可以通过取诱导度量的办法来证明黎曼度量的存在性。这需要用到 Whitney (1936) 的定理:

任一 n 维光滑流形 M^n 都能嵌入到 $2n+1$ 维欧式空间 R^{2n+1} 中作为子流形。 (R^{2n+1}, g_0) $g_M = \varphi^* g_0$

2. 一般地，给定黎曼流形 (M^n, g_M)，度量 g_M 和 $\varphi^* g_0$ 不同。John Nash 有更强的嵌入定理 $\hookrightarrow R^{2n+1}$

定理2. (Nash embedding thm) 任一黎曼流形 (M^n, g_M)，∃充分大 N，可以等距嵌入到标准黎曼流形 (R^N, g_0)，

换言之，∃嵌入 $\varphi: M\to R^N$ s.t. $\varphi^* g_0 = g_M$.

事实上，当 M 紧时，可取 $N=\dfrac{n(3n+11)}{2}$

M 非紧时，可取 $N=\dfrac{n(n+1)(3n+11)}{12}$.

3. 如果 g_1, g_2 是 M 的两个黎曼度量，则 ag_1+bg_2, $a,b>0$ 也是.

§5. 何以称为"度量"?

g 自身不是"度量"（或距离函数）

M 上一个距离函数 $d: M\times M\to\mathbb{R}$ 应满足 $\forall\, p,q,r\in M$.

(i) $d(p,q)\geq 0$，且 $d(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q$

(ii) $d(p,q)=d(q,p)$

(iii) $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)$.

$\rightsquigarrow$ g 诱导 M 上一个自然的距离函数.

为此目的，我们须先定义曲线的长度。

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条光滑浸入参数化曲线.

$\forall\, t\in[a,b]$, $\dot\gamma(t):=d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right)$ 是 $T_{\gamma(t)}M$ 中一个切向量

我们总假定 γ 的参数化是正则的 (regular)，即 $\dot\gamma(t)\neq 0, \forall t$

定义. γ 的长度

$$\mathrm{Length}(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}}\,dt.$$

Lemma 1. Length(γ) 不依赖于正则参数化的选取.

证明：设 $\gamma_1:[c,d]\to M$ 是同一条浸入曲线 γ 的另一个正则参数化。则存在光滑函数 $t_1=t_1(t):[a,b]\to[c,d]$ s.t.

$$\gamma_1(t_1(t))=\gamma(t).$$

(9)

$$\mathrm{Length}(\gamma_1) = \int_c^d \sqrt{\langle \dot\gamma_1(t_1), \dot\gamma_1(t_1)\rangle_{\gamma_1(t_1)}}\, dt_1$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left\langle \frac{dt}{dt_1}\dot\gamma(t), \frac{dt}{dt_1}\dot\gamma(t)\right\rangle_{\gamma(t)}} \left|\frac{dt_1}{dt}\right| dt$$

$$\cancel{\dot\gamma_1(t_1) = d\gamma_1\left(\frac{d}{dt_1}\right) = d\gamma_1\left(\frac{dt_1}{dt}\frac{d}{dt}\right) = \frac{dt_1}{dt}\, d\gamma\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{dt_1}{dt}\dot\gamma(t)}$$

$\gamma(t) = \gamma_1(t_1(t))$ $\qquad d\gamma\cdot\left(\frac{d}{dt}\right) f = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma_1(t_1(t)))$

$\forall f: M\to\mathbb{R}$ $\qquad = \frac{d}{dt_1} f\circ\gamma_1(t_1)\cdot\frac{dt_1}{dt}$

$\qquad = d\gamma_1\left(\frac{d}{dt_1}\right) f\cdot\frac{dt_1}{dt}$

$\Rightarrow \quad d\gamma\cdot\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{dt_1}{dt}\, d\gamma_1\left(\frac{d}{dt_1}\right)$

$\Rightarrow \quad \boxed{\dot\gamma(t) = t_1'(t)\,\dot\gamma_1(t_1)}$ $\qquad t_1'(t) = s'(t)^{-1}$

$$= \int_a^b \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}}\cdot\left|\frac{dt}{dt_1}\right|\cdot\left|\frac{dt_1}{dt}\right| dt. \quad \text{变量替换}$$

因为 t, t_1 均为正则参数化，则 $t_1 = t_1(t)$ 要么严格增，要么严格减

故有反函数. $t_1 = t_1(t)$ 有反函数 $t = t(t_1)$

故 ~~$t'(t_1)$, $t_1'(t)$ 同号，且 $t'(t_1)\, t_1'(t) = 1$~~.

$\square$

故一条几何曲线的长度是良定的 (well-defined)

习题：设 $\varphi: M\to N$ 是等距变换，γ 是 M 中曲线. 证 $\mathrm{Length}_M(\gamma) = \mathrm{Length}_N(\varphi(\gamma))$.

弧长参数化. $\gamma: [a,b] \longrightarrow M$ 正则曲线 (浸入)

称 $\qquad s(t) = \int_a^t \sqrt{\langle \dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau)\rangle_{\gamma(\tau)}}\, d\tau$

为 γ 的弧长函数.

$s = s(t)$ 是 $[a,b] \longrightarrow [0, \mathrm{Length}(\gamma)]$ 的严格增函数

设 $t = t(s)$ 为 $s = s(t)$ 的反函数.

将 γ 再参数化:

$$\gamma_1(s) = \gamma(t(s)), \quad 0 \le s \le \mathrm{Length}(\gamma)$$

性质：对弧长参数，有 $\langle \dot\gamma_1(s), \dot\gamma_1(s)\rangle_{\gamma_1(s)} \equiv 1$

证明：由上可知，在 $s=s(t)$ 处，$\dot{\gamma}_1(s)=\dot{\gamma}(t)\cdot t'(s)$

故 $\langle\dot{\gamma}_1(s),\dot{\gamma}_1(s)\rangle_{\gamma_1(s)}=\langle\dot{\gamma}(t)\cdot t'(s),\dot{\gamma}(t)\cdot t'(s)\rangle_{\gamma(t(s))}$

$$=(t'(s))^2\langle\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t)\rangle_{\gamma(t)}$$

又由 $t'(s)\cdot s'(t)=1\Rightarrow t'(s)=(s'(t))^{-1}$

$$=\left(\sqrt{\langle\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t)\rangle_{\gamma(t)}}\right)^{-1}$$

$\Rightarrow\langle\dot{\gamma}_1(s),\dot{\gamma}_1(s)\rangle_{\gamma_1(s)}\equiv 1$. □

上述讨论可推到M上分断光滑曲线上.

Lecture 1 2017.02.21

~~度~~距离函数 on (M,g).

$\forall\ p,q\in M$,

$C_{pq}=\{\gamma:[a,b]\to M\mid \gamma$ 分断光滑 且 $\gamma(a)=p,\ \gamma(b)=q\}$.

注意 $C_{pq}\neq\Phi$.

定义 (M,g)上 p和q的距离定义为

$$d(p,q):=\inf\{\mathrm{Length}(\gamma)\mid\gamma\in C_{pq}\}$$

立马可验证：$d:M\times M\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足

(i) $d(p,p)=0$, $d(p,q)\geq 0$

(ii) $d(p,q)=d(q,p)$

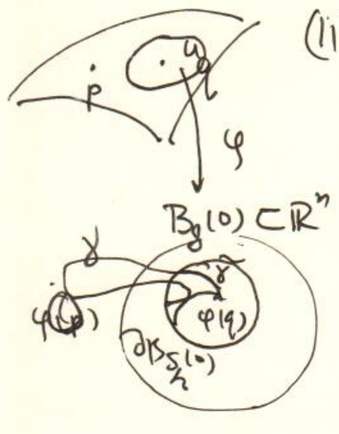
(iii) $d(p,q)\leq d(p,r)+d(r,q)$. （定义）

尚需再证：$d(p,q)=0\Rightarrow p=q$. 等价于 $p\neq q\Rightarrow d(p,q)>0$

定理. 距离函数 d 使(M,d)成为一个度量空间.

证明：只须证. $p\neq q\Rightarrow d(p,q)>0$.

取定 q 的坐标卡 $\{\varphi, U\}$ s.t.



$$\begin{cases} \varphi(q) = 0 \in V = B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \\ p \notin U. \end{cases}$$

$\varphi: U \to B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi^{-1}: B_\delta(0) \to U.$

拉回度量 $(\varphi^{-1})^* g_U := h$

设 γ 是从 $0 = \varphi(q)$ 出发到 $\partial B_{\delta/2}(0)$ 上某点的一条曲线.

$\tilde\gamma$ 为在 $B_{\delta/2}$ 中第一段曲线. 将其再参数到 $[0,1]$.

$$\text{Length}_h(\gamma) \geq \text{Length}_h(\tilde\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\tilde\gamma}, \dot{\tilde\gamma} \rangle_h}\, dt$$

设 λ 为 $h = (\varphi^{-1})^* g_U$ 的最小特征值.

$$\geq \sqrt{\lambda} \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\tilde\gamma}, \dot{\tilde\gamma} \rangle_{g_0}}\, dt$$

$$= \sqrt{\lambda}\ \text{Length}_{g_0}(\tilde\gamma) \geq \sqrt{\lambda} \cdot \delta/2.$$

注意到任意连接 p 和 q 的曲线必交 $\varphi^{-1}(\partial B_{\delta/2}(0))$ 于某点,

我们有 $d(p,q) \geq \frac{\delta\sqrt{\lambda}}{2} > 0.$

$\boxed{\text{观察: } \forall U,\ \exists \text{ metric open ball } B_{\frac{\sqrt{\lambda}\delta}{2}}(q) \subset U.}$ □

习题2. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, $\{g_{ij}(x)\}$ 是 K 上 n^2 个连续函数.

使 $\forall x \in K$, 矩阵 $[g_{ij}(x)]$ 对称.

(1) 如果 $\lambda(x)$, $\Lambda(x)$ 分别是 $[g_{ij}(x)]$ 的最小、最大特征值.

试证 λ 与 Λ 皆是 K 上连续函数

(2) 设 K 紧致. 且 $\forall x \in K$, $[g_{ij}(x)]$ 正定.

则 $\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2$, $\forall x \in K$, 和 $\forall (v^1, \cdots, v^n) = v \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\varepsilon_1 |v|^2 \leq \sum_{ij} g_{ij}(x) v^i v^j \leq \varepsilon_2 |v|^2$$

§6. 度量拓扑与原流形拓扑相同?

上述讨论：每一个流形拓扑的开集也是 (M,d) 拓扑的开集.

尚需证相反方向. 这由以下性质保证.

性质. 对固定 p，函数 $f(\cdot) = d(\cdot, p)$ 是 M 上连续函数.

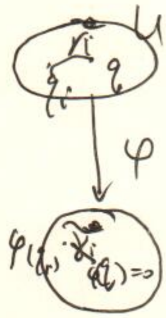
证明：设 q_i 在原流形拓扑下趋向于 q.

i.e. $\forall k$, $\exists N(k)$ s.t. 当 $i \geq N(k)$, 我们有 $\varphi(q_i) \in B_{\frac{1}{k}}(0)$ 欧氏

我们要证 $f(q_i) \to f(q)$.

由三角不等式 $|f(q_i) - f(q)| \leq d(q_i, q)$

故只须证 $\boxed{d(q_i, q) \to 0 \text{ as } i \to \infty.}$



$\exists$ 坐标卡 $\{\varphi, U, V\}$. $\varphi(U) = V = B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$.

$$h = (\varphi^{-1})^* g_U$$

取曲线 $\tilde{\gamma}_i : [0,1] \to V$, $\tilde{\gamma}_i(t) = t\varphi(q_i)$

是连接 $0 = \varphi(q)$ 和 $\varphi(q_i)$ 的直线

对 $i \geq N(k)$, $\frac{1}{k} < \delta$ g_0 是 V 上标准度量

$$\text{Length}_h(\tilde{\gamma}_i) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\tilde{\gamma}}_i, \dot{\tilde{\gamma}}_i \rangle_h}\, dt \leq \sqrt{\varepsilon_2} \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\tilde{\gamma}}_i, \dot{\tilde{\gamma}}_i \rangle_{g_0}}\, dt$$

$$= \sqrt{\varepsilon_2}\ \text{Length}_{g_0}(\tilde{\gamma}_i) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{k}$$

Since (U, g) 和 (V, h) 等距同构,

设 $\gamma_i = \varphi^{-1}(\tilde{\gamma}_i)$ 连接 p 和 q, 我们有

$$\text{Length}_g(\gamma_i) = \text{Length}_h(\tilde{\gamma}_i) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{k}$$

$$\Rightarrow d(p, q) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{k}. \qquad \square$$

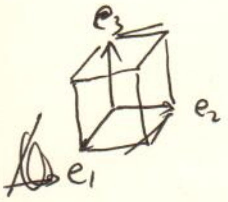
定理：(M,d) 的度量诱导的拓扑和原来 M 的流形拓扑相同.

证明：$f(\cdot)=d(p,\cdot)$ 连续性说明每个度量开集在流形拓扑下也是开的. □

§7. 黎曼测度. 体积

$\forall\, p\in M$. (T_pM, g) 内积(向量)空间.

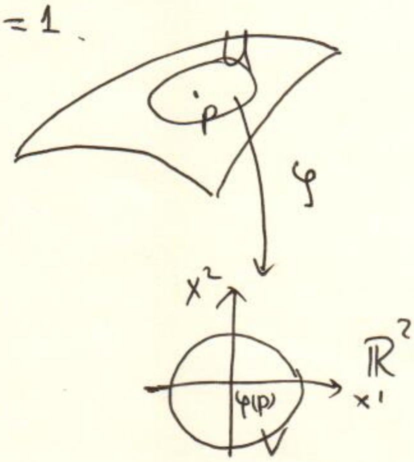
设考虑 T_pM 的标准正交集 $\{e_1,\cdots,e_n\}$.



由 $e_1,\cdots,e_n$ 张成的平行多面体体积为 1.

$\mathrm{vol}(e_1,\cdots,e_n)=1$.

想在黎曼流形上定义积分



局部地可以看作欧氏空间子集

$(\varphi(U)=V\subseteq\mathbb{R}^2)$

V上的积分 $\int_V (\quad)dx^1\cdots dx^n$

但是要在度量 $(\varphi^{-1})^* g_U$ 意义下

这时候要知道坐标曲线切向量 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p),\ i=1,\cdots,n\}$ 的长度

以及由它们张成的平行多面体的体积.

设 $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)=a_i^j e_j$，那么

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$g_{ik}(p)=\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle(p)=\langle a_i^j e_j,\ a_k^l e_l\rangle(p)$$

$$= a_i^j a_k^l\cdot\delta_{jl}=\sum_l a_i^l a_k^l$$

$$[g_{ik}] = AA^T$$

注意 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\}$ 张成的平行多面体体积为

$$\mathrm{vol}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(p),\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}(p)\right)=\det(a_i^j)(p)\,\mathrm{vol}(e_1,\cdots,e_n)=\sqrt{\det(g_{ij})}\,(p).$$

"小"的紧子集体积

对$p\in M$，~~设为某~~ $(U, x^1, \dots, x^n)$ 为坐标邻域：$x: U\to\mathbb{R}^n$.

考虑 $K\subset U$ 紧子集，$x(K)$ 可测.（$\mathbb{R}^n$ 中可测）

定义其体积为

$$\mathrm{vol}(K) := \int_{x(K)} \sqrt{\det(g_{ij})\circ x^{-1}}\ \underbrace{dx^1\cdots dx^n}_{\mathbb{R}^n\text{上 Lebesgue 测度}}$$

是否良定？

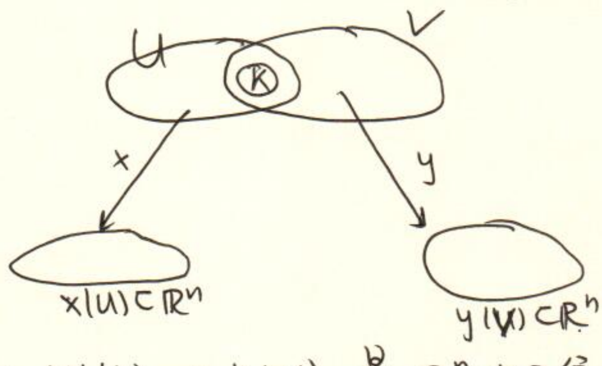
<u>性质</u> 上述定义不依赖于坐标的选取.

注：$x^{-1}: x(U)\to U\subset M$ 相当于区域 U 的一个"参数化".

这个性质是前述曲线长度不依赖于（正则）再参数化的一个更广情形. M 中一条浸入曲线 γ 可看作一维流形，不同的参数化对应于取不同的坐标

证明：假定我们有另一个坐标邻域 $(V, y^1, \dots, y^n)$ 也包含 K.

$y: V\to\mathbb{R}^n$.



$y\circ x^{-1}: x(U)\to y(V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集间的微分同胚

注意到，$\forall p\in K$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial x^i}(p) = \dfrac{\partial(y^k\circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p))\dfrac{\partial}{\partial y^k}(p)$

我们有 $\quad g^x_{ij}(p) := \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}(p), \dfrac{\partial}{\partial x^j}(p)\right\rangle = \dfrac{\partial(y^k\circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p))\dfrac{\partial(y^l\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(p))\cdot$

$$= \frac{\partial(y^k\circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(p))\ \frac{\partial(y^l\circ x^{-1})}{\partial x^j}(x(p))\ \underbrace{g^y_{kl}(p)}_{\left\langle \frac{\partial}{\partial y^k}(p), \frac{\partial}{\partial y^l}(p)\right\rangle}.$$

记 $J(x(p)) := \begin{pmatrix} \frac{\partial(y^1\circ x^{-1})}{\partial x^1} & \frac{\partial(y^1\circ x^{-1})}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial(y^1\circ x^{-1})}{\partial x^n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial(y^n\circ x^{-1})}{\partial x^1} & \frac{\partial(y^n\circ x^{-1})}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial(y^n\circ x^{-1})}{\partial x^n} \end{pmatrix}$ (15).

为映射 $y\circ x^{-1}$ 的 Jacobian 矩阵.

我们有 $[g^x_{ij}(p)] = J^T(x(p))\,[g^y_{kl}(p)]\,J(x(p))$

$$\Rightarrow \sqrt{\det(g^x_{ij})(p)} = |\det(J(x(p)))|\cdot\sqrt{\det(g^y_{kl}(p))}.$$

由变量转换得

$$\int_{y(K)} \sqrt{\det(g^y_{ij})\circ y^{-1}}\, dy^1\cdots dy^n = \int_{x(K)} \sqrt{\det(g^y_{ij})\circ y^{-1}(y\circ x^{-1})}\,|\det J(x(p))|\,dx^1\cdots dx^n$$

$y = y\circ x^{-1}(x)$

$$= \int_{x(K)} \sqrt{\det(g^x_{ij})\circ x^{-1}}\, dx^1\cdots dx^n.$$

□

"大"紧子集的体积

如果 K 不能含在一个坐标邻域中.

设 $\{U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha\}_{\alpha\in}$ 为 M 的局部有限坐标邻域覆盖

$\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in}$ 为从属于它的一个单位分解.

我们可取 实为有限和

$$\mathrm{vol}(K) = \sum_{\alpha\in} \int_{x_\alpha(K\cap U_\alpha)} \phi_\alpha\circ x_\alpha^{-1}\sqrt{\det(g^{x_\alpha}_{ij})\circ x_\alpha^{-1}}\, dx^1_\alpha\cdots dx^n_\alpha$$

性质：这个定义不依赖于坐标邻域覆盖和单位分解的选取

证明：设我们有另一组 M 的局部有限坐标邻域覆盖 $\{V_\beta, y^1_\beta, \dots, y^n_\beta\}_{\beta\in}$

单位分解 $\{\psi_\beta\}_{\beta\in}$.

有 $$\sum_{\beta\in}\int_{y_\beta(K\cap V_\beta)} \psi_\beta\circ y_\beta^{-1}\sqrt{\det(g^{y_\beta}_{ij})\circ y_\beta^{-1}}\, dy^1_\beta\cdots dy^n_\beta$$

$$= \sum_{\beta\in}\int_{y_\beta(K\cap V_\beta)} \underline{\sum_{\alpha\in}\phi_\alpha\circ y_\beta^{-1}}\cdot\left(\psi_\beta\cdot\sqrt{\det(g^{y_\beta}_{ij})}\right)\circ y_\beta^{-1}\, dy^1_\beta\cdots dy^n_\beta$$

$$\overset{\text{交换求和顺序}\ \leftarrow\text{因均为有限和}}{=} \sum_{\alpha}^{k} \int_{y_\beta(K\cap V_\beta)} \sum_{\beta}^{n} \psi_\beta\circ y_\beta^{-1}\cdot \phi_\alpha\circ y_\beta^{-1} \sqrt{\det g_{ij}^{y_\beta}}\circ y_\beta^{-1}\, dy_\beta^1\cdots dy_\beta^n$$

$$\overset{\text{变量替换}}{=} \sum_{\alpha}^{k} \int_{x_\alpha(K\cap U_\alpha)} \underbrace{\sum_{\beta}^{n}\psi_\beta\circ x_\alpha^{-1}}_{1}\ \phi_\alpha\circ x_\alpha^{-1} \sqrt{\det g_{ij}^{x_\alpha}}\circ x_\alpha^{-1}\, dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n$$

$$= \sum_{\alpha}^{k} \int_{x_\alpha(K\cap U_\alpha)} \phi_\alpha\circ x_\alpha^{-1} \sqrt{\det g_{ij}^{x_\alpha}}\circ x_\alpha^{-1}\, dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n. \qquad \square$$

设M上带紧支集的连续函数所组成的向量空间记作 $C_0^0(M)$.

对 $f\in C_0^0(M)$, 可定义

$$\int_M f = \sum_\alpha \int_{x^\alpha(U_\alpha)} (\phi_\alpha f)\circ x_\alpha^{-1} \sqrt{\det g_{ij}^{x_\alpha}\circ (x_\alpha)^{-1}}\, dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^n$$

由上述讨论知,这是良定的. 且 $\phi_\alpha\geq 0$ 说明

$$f\in C_0^0,\ f\geq 0 \Rightarrow \int_M f\geq 0.$$

于是我们有一正线性泛函 $J: C_0^0\to\mathbb{R}$ 使得

$$J(f)\equiv \int_M f$$

由Riesz表示定理可知,在M上存在唯一的Borel测度 dvol,使得对任意 $f\in C_0^0(M)$, $\displaystyle\int_M f=\int_M f\,d\mathrm{vol}$.

dvol: 黎曼体积元.(体积密度)

注. 在每个坐标邻域中,该积分可看作是对 n次微分式

$\Omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$

的积分. 由于在进行坐标变换时

$$dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n = \det\underbrace{(J(x(p)))}_{y\circ x^{-1}\text{ in Jacobian}}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

故 ω_g 可能会变号.

特别地，当 M 可定向时，我们就可以整体定义一个正的 n 次微分式 $\Omega_0 = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

这时我们有：$\int_M f\, d\mathrm{vol} = \int_M f\, \Omega_0$ □

设 $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ 是 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的对偶标架场，那么 $\Omega_0 = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n$.

流形上对微分形式的积分.

现在可以定义 $f \in C_0^\infty(M)$ 的 L^p norm $1 \le p < \infty$:

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_M |f|^p d\mathrm{vol}\right)^{1/p}$$

可以 $C_c^\infty(M)$ 在 L^p norm 下的完备化，得到 $L^p(M)$.

特别地对 $p=2$，我们可定义如下内积：$\forall f_1, f_2 \in L^2(M)$.

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} := \int_M f_1 \cdot f_2 \, d\mathrm{vol}.$$

这使 $L^2(M)$ 成为 Hilbert 空间.

Lecture 2. 2017.02.23

散度定理：

上面我们看到如何在 M 上积分函数 $C_0^\infty(M)$. 下面我们来考虑一个特别的 C^∞ 函数：设 X 是 M 上一个光滑向量场，定义 M 上一个 C^∞ 函数 $\mathrm{div} X$，称为 X 的散度 (divergence).

设 $(U, x^1, \dots, x^n)$ 是 M 的一个坐标邻域，我们有体积元

$$\Omega_0 = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

定义 X 的散度 $\mathrm{div} X : M \to \mathbb{R}$ 是 M 上的函数使得

$$(\mathrm{div} X)\, \Omega_0 = d\,(i(X)\Omega_0).$$

回忆 $i(X)$ 是对 X 做内乘 (interior product)

$(0,p)$ 共变张量 $\to$ $(0,p-1)$ 共变张量

即对向量 $Y_1,\cdots,Y_{n-1}$，有

$$i(X)\Omega_0(Y_1,\cdots,Y_{n-1}) := \Omega_0(X,Y_1,\cdots,Y_{n-1})$$

注记 (1) 换到另外一个坐标邻域时，Ω_0 可能会换符号，但这不改变 $\mathrm{div}X$ 的定义：$\mathrm{div}X$ 的定义并不要求 M 是定向的。

(2) $\mathrm{div}X$ 在局部坐标下的表达式　设 $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$

$$i(X)\Omega_0 = i\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

记 $G=\det(g_{ij})$

$$= \sum_i X^i\sqrt{\det(g_{ij})}\,(-1)^{i-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

$$\boxed{i(\partial_i)(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n) = (-1)^{i-1}(dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n).}$$

$\forall\ Y_1,\cdots,Y_{n-1}$.

$$\begin{aligned}
& i(\partial_i)(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n)(Y_1,\cdots,Y_{n-1}) \\
&= dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n(\partial_i, Y_1,\cdots,Y_{n-1}) \\
&= \sum_{\sigma\in S(n)}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\,dx^{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes dx^{\sigma(n)}(\partial_i, Y_1,\cdots,Y_{n-1}) \\
&= \sum_{\substack{\sigma\in S(n)\\ \sigma(1)=i}}\mathrm{sgn}(\sigma)\,dx^{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes dx^{\sigma(n)}(Y_1,\cdots,Y_{n-1}) \\
&= \sum_{\tau\in S(n-1)}(-1)^{i-1}\mathrm{sgn}(\tau)\,dx^{\tau(2)}\otimes\cdots\otimes dx^{\tau(n)}(Y_1,\cdots,Y_{n-1}) \\
&= (-1)^{i-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n(Y_1,\cdots,Y_{n-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(i(X)\Omega_0) &= \sum_i(-1)^{i-1}\sum_k\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{G}X^i)\,dx^k\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n \\
&= \sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{G})\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n. \\
&= (\mathrm{div}X)\sqrt{G}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{G})}$$

□

注意当 $M=\mathbb{R}^n$, $(g_{ij})=(\delta_{ij})$ 时，我们有，$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$

$$\operatorname{div}X=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}X^i=\sum_{i=1}^n\frac{\partial X^i}{\partial x^i}$$

这恰是经典的向量场散度.

(3). 由 Cartan's magic formula (微分形式的~~李~~Lie导数 $\mathcal{L}_X\omega = i(X)d\omega + d\,i(X)\omega$) 我们有

$$\mathcal{L}_X(\Omega_0) = d(i(X)\Omega_0) = \operatorname{div}(X)\,\Omega_0$$

n次微分式.

这说明一个向量场的散度是体积元沿向量场的无穷小变化速率.

~~性质: X 为 M 上 C^∞ 向量场, $f\in C^\infty(M)$, 则~~

~~$\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + g($~~

<u>定理</u>: (散度定理) 设 X 为 (M,g) 上具有紧支集的光滑向量场

则 $$\int_M \operatorname{div}(X)\,d\mathrm{vol} = 0$$

证明: 设 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个局部有限坐标覆盖. $\{\varphi_\alpha\}$ 是附属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解. 则 $X=\sum_\alpha \varphi_\alpha X$.

由 X 具紧支集, 上述加和为有限和

故 $$\int_M \operatorname{div}\Big(\sum_\alpha\varphi_\alpha X\Big)\,d\mathrm{vol} = \sum_\alpha\int_{U_\alpha}\operatorname{div}(\varphi_\alpha X)\,d\mathrm{vol}.$$

只须对每个 α 证明 $\int_{U_\alpha}\operatorname{div}(\varphi_\alpha X)\,d\mathrm{vol} = 0$

不妨假设 X 的支集含在一个坐标邻域 $(U, x^1,\dots,x^n)$ 内.

设 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则由积分的定义

$$\int_M \operatorname{div}(X)\,d\mathrm{vol} = \int_U \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{G})\,d\mathrm{vol}$$

$$= \int_{x(U)} \frac{1}{\sqrt{G\circ x^{-1}}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^i\sqrt{G}\circ x^{-1}\right)\sqrt{G\circ x^{-1}}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$= \int_{x(U)} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^i\sqrt{G}\circ x^{-1}\right) dx^1\cdots dx^n. = 0 \qquad \square$$

(可延拓 $x(U)$ 至一个方体中)

一个特别的向量场：一个函数的**梯度**向量场： $\mathrm{grad} f$

对任意向量场 Y，有

$$\langle \mathrm{grad} f, Y\rangle = g(\mathrm{grad} f, Y) = Y(f).$$

局部坐标表示 $(U, x^1, \cdots, x^n)$

设 $\mathrm{grad}\, f = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$， $Y = Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$

则 $g(\mathrm{grad} f, Y) = g_{ij}X^iY^j = Y(f) = Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}f$ (1)

因 $[g_{ij}]$ 正定，记 $[g^{ij}]$ 为其逆阵，即

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j.$$

$$(1) \Rightarrow g_{ij}X^iY^j = \sum_j\left(\sum_i g_{ij}X^i\right)Y^j = \sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)Y^k \quad \forall\, Y.$$

$$\Rightarrow \sum_i g_{ij}X^i = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_j g^{kj}\sum_i g_{ij}X^i}_{} = \sum_j g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

$$= \sum_i \delta^k_i X^i = X^k.$$

从而我们有 $\boxed{\mathrm{grad} f = \left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}}$

注记. (1) 当 $M=\mathbb{R}^n$, $(g_{ij})=(\delta_{ij})$ 时，

$$\mathrm{grad} f = \sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$$

与通常的梯度吻合.

(2) "梯度向量场垂直于水平集".

性质：设 $f\in C^\infty(M)$, c 为 f 的一个正则值 (regular value)

那么梯度向量场 grad f 和水平集 $f^{-1}(c)$ 垂直.

证明：c 为 f 的一个正则值说明 $f^{-1}(c)$ 是 M 的子流形.

设 $X\in Tf^{-1}(c)\subset TM$.

从流形理论知 $Xf=0$ on $f^{-1}(c)$. 故而

$$g(\mathrm{grad}f, X)=Xf=0. \text{ on } f^{-1}(c).$$

即 grad f 和 $f^{-1}(c)$ 垂直. □

(3) 在黎曼流形 (M,g) 上，我们可以说向量场 X 对偶于某个一次微分式 η，即对任意向量场 Y,

$$\langle X,Y\rangle=g(X,Y)=\eta(Y).$$

特别地，grad f 对偶于 df，因为

$$g(\mathrm{grad}f, Y)=Yf=df(Y).$$

推论. 设 $f\in C_0^\infty(M)$, 即 f 为 M 上具有紧支集的光滑函数，则

$$\int_M \mathrm{div}(\mathrm{grad}f)\, d\mathrm{vol}=0.$$

定义：对任意光滑函数 f，定义 f 的 Laplacian 为

$$\Delta f:=\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)$$

注记：局部坐标表示 $(U, x^1,\cdots,x^n)$

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left((\mathrm{grad}f)^i\sqrt{G}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}f\sqrt{G}\right)=\frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i\left(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j f\right).$$

若 $M=\mathbb{R}^n$, $(g_{ij})=(\delta_{ij})$，我们有

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i2}}$$

(2) $\displaystyle\int_M \Delta f \, d\mathrm{vol} = 0$, $\forall f \in C_0^\infty(M)$.

(3). $\forall f$ 光滑函数，X 光滑向量场

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{div}(fX) &= f\,\mathrm{div}X + g(\mathrm{grad} f, X) \\ &= f\,\mathrm{div}X + \langle \mathrm{grad} f, X\rangle \end{aligned}} \quad (*)$$

因为
$$\begin{aligned}\mathrm{div}(fX) &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^i}(fX^i\sqrt{G}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\cdot(X^i\sqrt{G}) + f\frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{G})\right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}X^i + f\,\mathrm{div}(X) = \langle \mathrm{grad} f, X\rangle + f\,\mathrm{div}X.\end{aligned}$$

<u>定理</u> (Green's formula) 设 f 和 h 是 M 上的光滑函数. 其中至少有一个有紧致支集。则

$$\begin{aligned}\int_M f\Delta h \, d\mathrm{vol} &\overset{(1)}{=} -\int_M g(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} h)\, d\mathrm{vol} \\ &\overset{(2)}{=} \int_M (\Delta f)\cdot h \, d\mathrm{vol}.\end{aligned}$$

<u>证明</u>：由应用 $(*)$ 到 $X = \mathrm{grad}\, h$，我们有.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(f\,\mathrm{grad}\, h) &= f\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, h) + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}\, h\rangle \\ &= f\Delta h + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}\, h\rangle\end{aligned}$$

~~这给出等式(1)~~. 又因 $f\,\mathrm{grad}\, h$ 具有紧支集，由散度定理得到等式(1). 类似得(2). □

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j f)}$$

我们称 Δ the Laplace-Beltrami operator

(M,g) 紧流形，对任意函数均有紧支集

注意我们有，$\forall f \in C^\infty(M)$，

$$\langle \Delta f, h\rangle_{L^2} = \langle \Delta f, \Delta h\rangle_{L^2}$$

（Δ 在 $L^2(M)$ 上对称.）

$$\langle \Delta f, f\rangle_{L^2} = \langle \nabla f, \nabla f\rangle_{L^2} = \int_M |\nabla f|^2 \, dvol \geq 0.$$

（Δ 是正算子）.

<u>注记</u>：散度定理和 Green 公式均可推广到紧致带边黎曼流形上.

<u>定理</u>：假设 M 是紧致带（的）边界的黎曼流形，边界为 ∂M，设 ν 是 ∂M 上的外向单位法向量场（outward normal vector field）.

那么对 M 上的光滑向量场，有

$$\int_M (\operatorname{div} X) \, dvol_M = \int_{\partial M} g(X, \nu) \, dvol_{\partial M}$$

<u>注记</u>：M^n 是另一个 n 维黎曼流形 N 的紧子集，M 上的黎曼度量和 N 相同，∂M 上具有一个 g_N 的诱导度量，故有 $dvol_{\partial M}$.

作为推论我们有，$\forall f, h \in C^\infty(M)$

$$\int_M f \Delta h \, dvol_M = -\int_M g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) \, dvol_M + \int_{\partial M} g(\operatorname{grad} h, \nu) f \, dvol_{\partial M}.$$