黎曼几何作业（一）

1. (i) 设 $f: N \to \mathbb{R}^{n+1}$ 是 n 维光滑流形 N 到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个浸入。f 在 N 的一个坐标邻域 $\{U, u^1, \dots, u^n\}$ 上可以表示为

$$x^k = f^k(u^1, \dots, u^n), \ \ 1 \le k \le n+1,$$

其中 $(x^1, \dots, x^{n+1})$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标。设 g_0 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的标准欧式度量。证明：

$$(f^* g_0)_{|U} = \sum_{k,i,j} \frac{\partial f^k}{\partial u^i} \frac{\partial f^k}{\partial u^j} du^i \otimes du^j.$$

(ii) 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的球面 S^2。设 (x, y, z) 是 $\mathbb{R}^3$ 的坐标。考虑 S^2 的如下坐标邻域:

$$x = \sqrt{1-z^2}\cos\theta, \ y = \sqrt{1-z^2}\sin\theta, \ z = z, \theta \in (0, 2\pi), z \in (-1, 1).$$

证明 S^2 在该邻域上的诱导度量为

$$g_{|S^2} = \frac{1}{1-z^2} dz \otimes dz + (1-z^2) d\theta \otimes d\theta$$

. (iii) 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的球面 S^n。设 $(x^1, \dots, x^{n+1})$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标。在 $S^n \bigcap \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} \neq 1\}$ 上给如下坐标：

$$\phi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}} \right) =: (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n.$$

证明 S^n 在该坐标邻域上的诱导度量为

$$g_{|S^n} = \frac{4}{(1+|y|^2)^2} \sum_{i=1}^n dy^i \otimes dy^i.$$

2. 设 $\phi: M \to N$ 为光滑黎曼流形 M 和 N 的一个等距变换。$\gamma: [a, b] \to M$ 为 M 中的一条光滑浸入曲线。证明 $\mathrm{Length}_M(\gamma) = \mathrm{Length}_N(\gamma)$.

3. 设 K 为 $\mathbb{R}^{\ltimes}$ 的子集。$\{g_{ij}(x)\}$ 是 K 上 n^2 个连续函数使得对任意 $x \in K$, 矩阵 $[g_{ij}(x)]$ 对称。

(i) 如果 $\lambda(x), \Lambda(x)$ 分别是矩阵 $[g_{ij}(x)]$ 的最小，最大特征值。证明 λ, Λ 皆为 K 上的连续函数。

(ii) 设 K 为紧致的，并且对任意 $x \in K$, 矩阵 $[g_{ij}(x)]$ 是正定的。证明存在正常数 ϵ_1, ϵ_2, 对任意 $x \in K$, 任意 $(v^1, \ldots, v^n) = v \in \mathbb{R}^n$，有

$$\epsilon_1 |v|^2 \leq \sum_{i,j} g_{ij}(x) v^i v^j \leq \epsilon_2 |v|^2.$$

4. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的球面 S^2。运用问题 1.(ii) 中得到的诱导度量，

(i) 计算 S^2 上大圆的长度。

(ii) 计算区域 $K_{a,b} = \{(z, \theta) : a < z < b\}$, $-1 < a < b < 1$, 的面积。

(iii) 对任意光滑向量场 $X = X^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + X^z \frac{\partial}{\partial z}$, 写出 $\mathrm{div}(X)$.

(iv) 对任意光滑函数 $f = f(z, \theta)$, 写出 gradf 和 Δf.