

微分几何作业

1. 设 $\mathbf{a}(t)$ 是一个连续可微的处处非零向量值函数。证明

- (i) $\mathbf{a}(t)$ 的方向不变当且仅当 $\mathbf{a}'(t) \wedge \mathbf{a}(t) = 0$.
- (ii) 如果 $\mathbf{a}(t)$ 与某一固定的方向垂直, 则 $(\mathbf{a}(t), \mathbf{a}'(t), \mathbf{a}''(t)) = 0$. 反之, 如果 $(\mathbf{a}(t), \mathbf{a}'(t), \mathbf{a}''(t)) = 0$, 并且处处有 $\mathbf{a}'(t) \wedge \mathbf{a}(t) \neq 0$, 那么 $\mathbf{a}(t)$ 必与某一固定的方向垂直。

2. 证明对任意的光滑函数 $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 有

- (i) $d(f + g) = df + dg$.
- (ii) $d(fg) = f dg + g df$.
- (iii) $dh(f) = h'(f)df$.

3. 证明对任意的光滑函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 和光滑向量场 F , 有

- (i) $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$.
- (ii) $\text{div}(\text{rot} F) = 0$