§3. 曲面论基本定理

有了以上曲面结构方程的讨论，我们可以开始曲面论基本定理的讨论了.

几何问题：给定 $\varphi = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha \otimes du^\beta$ （$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$，$(g_{\alpha\beta})$ 正定）

$\psi = b_{\alpha\beta}\, du^\alpha \otimes du^\beta$ （$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$）

是否存在正则曲面 $r = r(u,v)$ 以 φ，ψ 为第一、第二基本形式？如存在，是否唯一？

翻译成分析问题：设 $D \subset \mathbb{R}^2$. 令 $g_{\alpha\beta} \in C^\infty(D)$，$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$，$(g_{\alpha\beta})$ 正定，$b_{\alpha\beta} \in C^\infty(D)$，$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$.

问是否存在浸入 $r: D \to \mathbb{R}^3$ 使得

$$\begin{cases} \left\langle \dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}, \dfrac{\partial r}{\partial u^\beta} \right\rangle = g_{\alpha\beta} \\[2ex] \left\langle \dfrac{\partial^2 r}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \dfrac{\dfrac{\partial r}{\partial u^1} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial u^2}}{\left|\dfrac{\partial r}{\partial u^1} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial u^2}\right|} \right\rangle = b_{\alpha\beta} \end{cases} \qquad (*)$$

如存在是否唯一？

也即，这个问题是非线性偏微分方程组 $(*)$ 的解存在唯一性问题。但这里通过"几何的讨论"，我们可以把它归结为解线性 PDE 方程组的问题!!

我们接下来的讨论要用到如下的分析结果：

考虑求解 n 个 D 上光滑函数，我们可记其为 $F: D \to V \subset \mathbb{R}^n$，$D \subset \mathbb{R}^2$.

<u>定理</u>.（Spivak I, pp.187. Theorem）设 $D \times V \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ 为开区域. $f_i : D \times V \to \mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 函数，$i=1,2$.

则对任一个 $x \in V$，如果有两个函数 $F_1: D_1 \to V$，$F_2: D_2 \to V$

满足 $\begin{cases} F(0) = x \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u^j}(u^1,u^2) = f_j(u^1,u^2, F_1(u^1,u^2)), \quad \forall (u^1,u^2) \in D \end{cases}$ (*),

则 $F_1 = F_2$ on $D_1 \cap D_2$.

如果在 ~~(0, x) ∈~~ $D \times V$ 上 ~~的一个邻域中~~ 有:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(f_j(u^1,u^2,F(u^1,u^2))\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}\left(f_i(u^1,u^2,F(u^1,u^2))\right)$$

则存在 $0 \in D$ 的一个小邻域 W, ~~存在~~ 光滑函数 $F: W \to V$ 满足方程(*).

注记：如果(*)是线性的，则可取 $W = D$.