微分形式的积分 [ONeill §4.6] 的积分定义为相应形式在相应区域上的积分。

我们也可讨论曲面上区域或曲线上微分形式的积分.

定义1 设 ϕ 是M上1-form，设 $c: [a,b] \to M$ 是M上曲线. 则 ϕ 沿 c 的积分定义为

$$\int_c \phi := \int_{[a,b]} \alpha^* \phi = \int_a^b \phi(\alpha'(t))\, dt$$

这里 $\alpha^*\phi$ 是 1-form ϕ 的"拉回"，是 R^2 上的 1-形式. 限制在 $[a,b]$ 上，有

$$\alpha^*\phi\left(\frac{d}{dt}\right) := \phi\left(\underset{\text{切映射}}{\alpha_*}\frac{d}{dt}\right) = \phi(\alpha'(t))$$

故而限制在 $[a,b]$ 上有 $\alpha^*\phi = \phi(\alpha'(t))\,dt$.

因此，微积分基本定理可表为

定理1. 设 f 是M上光滑函数. 设 $c: [a,b] \to M$ 是M上曲线满足 $c(a)=p$，$c(b)=q$. 则有：

$$\int_c df = f(q) - f(p).$$

定义2. 设 η 是M上 2-form，设 $r: R \to M$ 是M上区域（R为矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$）则 η 沿 r 的积分定义为

$$\iint_r \eta := \iint_R r^*(\eta) = \int_a^b \int_c^d \eta(r_u, r_v)\, du \wedge dv$$

这里 $r^*(\eta)$ 为 R上二形式，故必可写成 $h\, du\wedge dv$ 的形式.

又由 ~~…~~ 因为 $\phi\wedge\psi(v,w) = \phi(v)\psi(w) - \phi(w)\psi(v)$

知 $du\wedge dv\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = du\wedge dv\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0$

$$r^*(\eta)\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) := \eta\left(r_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), r_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right) = \eta(r_u, r_v)$$

$$\Rightarrow \quad r^*(\eta) = \eta(r_u, r_v)\, du\wedge dv.$$

定理2. (Stokes' theorem) $\iint_r d\phi = \int_{\partial r} \phi.$