补 203

等距变换：

Gauss的一个本质的贡献是意识到E^3中曲面的内蕴度量的概念。E^3中曲面上的曲线长度可由E^3的内积结构算出，内蕴地看，就是由二次型：第一基本形式 I 算出。实际上，"E^3中曲面上的曲线长度"和"二次型 I"相互确定

后者确定前者：积分 $\int_0^s \sqrt{I(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt$

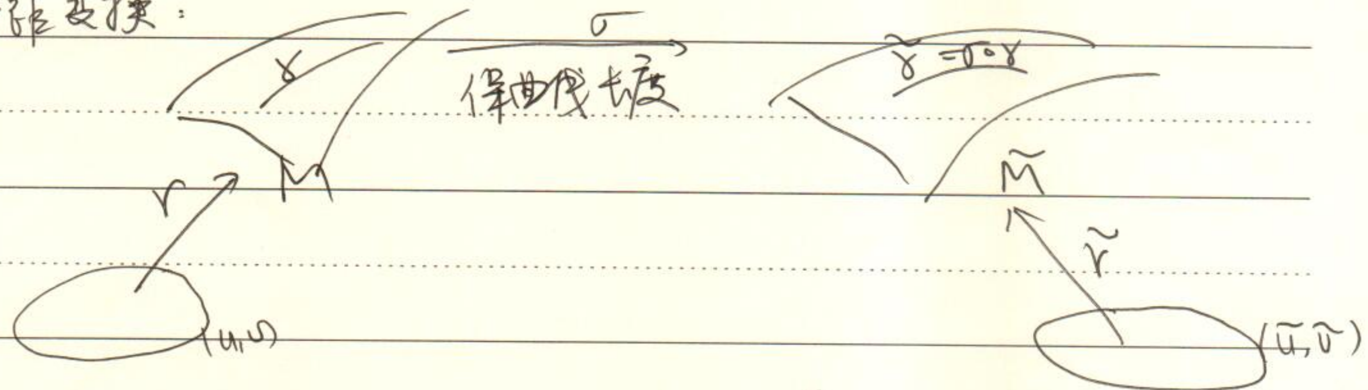
前者决定后者：微分 $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma(s)) = \sqrt{I(\gamma'(0),\gamma'(0))}$.

而"E^3中曲面上曲线的长度" $\Leftrightarrow$ 曲面上的度量结构.

Gauss的想法是 曲面上有了度量结构，就有了一种"几何"。也即，给定第一基本形式 I，就可以计算，长度、角度、高斯曲率……

逐点地来看，给定T_pM的一组基，二次型 I 就对应于一个对称2×2矩阵。特别地，取自然基$\{r_u, r_v\}$时，I 就由$\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}$确定.

等距变换：



$$\int_0^s \sqrt{I(\gamma'(t),\gamma'(t))}\,dt = \int_0^s \sqrt{I((\sigma\circ\gamma)'(t),(\sigma\circ\gamma)'(t))}\,dt$$

关于s求导 $I(\gamma'(s),\gamma'(s)) = I((\sigma\circ\gamma)'(t),(\sigma\circ\gamma)'(t))$

$= I(\sigma_*(\gamma'(t)),\sigma_*(\gamma'(t)))$.

光滑性：$(u,v)\xrightarrow{r} M \xrightarrow{\sigma} \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{r}^{-1}} (\tilde{u},\tilde{v})$，作为$R^2\to R^2$映射光滑：

證明 $\sigma_*(a r_u + b r_v) = a\,\sigma_*(r_u) + b\,\sigma_*(r_v)$

$$= a\left(\tilde r_{\tilde u}\frac{\partial \tilde u}{\partial u} + \tilde r_{\tilde v}\frac{\partial \tilde v}{\partial u}\right) + b\left(\tilde r_{\tilde u}\frac{\partial \tilde u}{\partial v} + \tilde r_{\tilde v}\frac{\partial \tilde v}{\partial v}\right)$$

$$= \left(a\frac{\partial \tilde u}{\partial u} + b\frac{\partial \tilde u}{\partial v}\right)\tilde r_{\tilde u} + \left(a\frac{\partial \tilde v}{\partial u} + b\frac{\partial \tilde v}{\partial v}\right)\tilde r_{\tilde v}$$

記 : $\sigma_* : T_pM \longrightarrow T_{\sigma(p)}M$,

在 r_u, r_v 　　在 $\tilde r_{\tilde u}, \tilde r_{\tilde v}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde u}{\partial u} & \frac{\partial \tilde u}{\partial v} \\ \frac{\partial \tilde v}{\partial u} & \frac{\partial \tilde v}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

光滑 :