平均曲率和极小曲面

这一节我们来讨论平均曲率 $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 的几何意义。

回忆，Weingarden 变换 W 在 $\{r_u, r_v\}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

则有平均曲率

$$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2(EG-F^2)} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} LG-MF & * \\ * & -MF+NE \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}.$$

H 的重要性体现在它在曲面(片)面积变分中的作用：考虑正则曲面片 $r: D \longrightarrow R^3$

其中 $D \subset R^2$ 是紧区域，且边界 ∂D 是一条分段正则的闭曲线。

我们称光滑映射 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times D \to R^3$，其中

$$\alpha(0, u, v) = r(u, v), \quad \forall (u,v) \in D$$

为 r 的一个变分 (variation)。

可以证明，对充分小的 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，

$$r_t(u,v) := \alpha(t, u, v) \quad \text{仍是正则曲面}$$

如果固定点 (u,v)，则 $\alpha(t,u,v)$ 为过点 $r(u,v)$ 的一条曲线，其切向量

$$W(u,v) := \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, u, v)$$

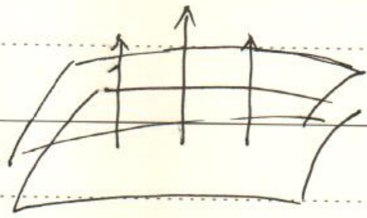
称为变分向量场 (variation vector field).

我们考虑如下特别选取之变分：

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon)\times D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(t, u, v) := r(u,v) + t\cdot\varphi(u,v)\, n(u,v)$$

其中 $n(u,v)$ 为单位法向量，$\varphi: D\to\mathbb{R}$ 为光滑函数。易见，此时变分向量场 $W=\varphi\cdot n$.



性质 令 r, α 如上所述。考查曲面片 r_t, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的面积 $A(t) := \text{Area}(r_t|_D)$.
我们有：

$$A'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t) = -\iint_D 2\varphi H \underbrace{|r_u\wedge r_v|\, du\, dv}_{d\sigma = \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv}.$$

证明：先来考查

$$A(t) := \iint_D \sqrt{E_tG_t - F_t^2}\, du\, dv$$

~~其中 $(r_t)_u$~~ 记 $r_t(u,v) = r(u,v) + t\cdot\varphi(u,v)\, n(u,v)$

我们有 $(r_t)_u = r_u + t\varphi\, n_u + t\varphi_u n$

$$(r_t)_v = r_v + t\varphi\, n_v + t\varphi_v n$$

故而 $E_t = \langle (r_t)_u, (r_t)_u\rangle = E + 2t\varphi\overbrace{\langle r_u, n_u\rangle}^{-L} + t^2\varphi^2\langle n_u, n_u\rangle + t^2\varphi_u^2$

（这其中，我们用了 $\langle n_u, n\rangle = 0$, $\langle r_u, n\rangle = 0$）

$$F_t = \langle (r_t)_u, (r_t)_v\rangle = F + t\varphi\big(\overbrace{\langle r_u, n_v\rangle + \langle r_v, n_u\rangle}^{-2M}\big) + t^2\varphi^2\langle n_u, n_v\rangle + t^2\varphi_u\varphi_v$$

$$G_t = \langle (r_t)_v, (r_t)_v\rangle = G + 2t\varphi\underbrace{\langle r_v, n_v\rangle}_{= -N} + t^2\varphi^2\langle n_v, n_v\rangle + t^2\varphi_v^2$$

因此，我们计算

$E_tG_t-(F_t)^2 = \cancel{EG-F^2+(E-2t\varphi L)(F-2Mt\varphi)}$

$= (E-2t\varphi L)(G-2t\varphi N)-(F-2t\varphi M)^2 + t$ 高阶项

$= EG-F^2-2t\varphi(LG+NE-2MF)+t$ 高阶项

$=(EG-F^2)\left(1-4t\varphi\cdot\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}\right)+$ 高阶项

$=(EG-F^2)(1-4t\varphi H)+\underbrace{\text{高阶项}}_{\varepsilon(t)}$

注意 $\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=0$

从而 $A'(0)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\iint_D\sqrt{E_tG_t-F_t^2}\,dudv$

$$=\iint_D \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\sqrt{(EG-F^2)(1-4t\varphi H)+\varepsilon(t)}\,dudv$$

$$=\iint_D \left.\frac{-(EG-F^2)\cdot 4\varphi H+\varepsilon'(t)}{2\sqrt{(EG-F^2)(1-4t\varphi H)+\varepsilon(t)}}\right|_{t=0}dudv$$

$$=-\iint_D 2\varphi H\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$ □

推论：如果在 $p=r(u,v)$ 处 $H(u,v)\neq 0$，则存在 $\varphi:D\to\mathbb{R}^2$ 使得 $A'(0)<0$.

证明：由光滑性，存在 (u,v) 的充分小邻域 R s.t. $H|_R$ 上不为0且符号不变．取 $\varphi:D\to\mathbb{R}^2$ 满足 $\varphi|_{D\setminus R}\equiv 0$，且 $\varphi|_R$ 上与 H 同号．

则有 $A'(0)=-2\iint_D 2\underbrace{\varphi H}_{>0}\sqrt{EG-F^2}\,dudv<0$. □

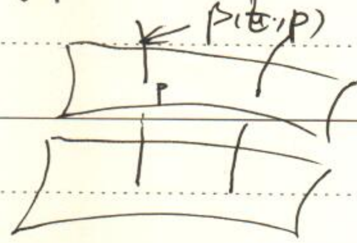
定义．称 $H\equiv 0$ 的曲面为极小曲面 (Minimal surface).

注记：我们在面积变分中只考虑了沿法向量场的变分。只考虑这类变分就"足够"好的原因我们粗略的详释如下：

(i) 对任意变分 $\alpha: (-\varepsilon,\varepsilon)\times D \to R^3$，我们总能找到变分 $\beta: (-\varepsilon',\varepsilon')\times D \to R^3$ 使得

(a) 变分场 $\frac{\partial\beta}{\partial t}\big|_{t=0}$ 和曲面垂直

(b) 整张曲面 $\{\alpha(t,u,v) \mid (u,v)\in D\}$ 和 $\{\beta(t,u,v) \mid (u,v)\in D\}$ 相同（参数化选取可不同）



(ii) 可以说明 $A'(0)$ 只依赖于变分向量场 W，

即只依赖于 $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0,u,v)$，而并不需要 $\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,u,v)$，$\forall t$.