§4.1 正交活动标架运动方程

$$\{r;\ e_1, e_2, \underset{\substack{\| \\ n}}{e_3}\}$$

首先，dr 是一个向量值微分 1-form.

$$dr = r_u\,du + r_v\,dv = du^1 r_1 + du^2 r_2$$

因为 $\{r_1, r_2\}$ 和 $\{e_1, e_2\}$ 均为一点处切平面的基，所以有矩阵 $A = (a_i^j)$ s.t.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \qquad (\text{易知 } \det A \neq 0)$$

注意 $\{a_i^j,\ i,j=1,2\}$ 均为曲面 M 上的光滑函数.

从而我们有

$$dr = (du^1\ \ du^2)\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = (du^1\ \ du^2)\,A\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$= (a_1^1 du^1 + a_2^1 du^2)e_1 + (a_1^2 du^1 + a_2^2 du^2)e_2$$

我们记微分 1-form

$$\begin{cases} \omega^1 = a_1^1 du^1 + a_2^1 du^2 \\ \omega^2 = a_1^2 du^1 + a_2^2 du^2 \end{cases} \qquad (**)$$

则有

$$\boxed{dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2}$$

我们来考查一下 1-form ω^i 到底是什么？

对任一切向量场 $X = x^1 r_1 + x^2 r_2 = x^i r_i = x^i a_i^j e_j$

有 $\omega^i(X) = a_j^i du^j(X) = a_j^i du^j(x^l r_l) = a_j^i x^l \delta_l^j$
$= x^j a_j^i = \langle X, e_i \rangle,\quad i=1,2.$

即

$$\boxed{\omega^i(X) = \langle X, e_i \rangle,\quad i=1,2}$$

同理，de_i, $i=1,2,3$ 也是向量值 1-form，可以写成 e_1, e_2, e_3 以 1-form 为系数的线性组合. 记

$$de_i = \omega_i^j e_j = \omega_i^1 e_1 + \omega_i^2 e_2 + \omega_i^3 e_3$$

类似于前面考查曲线的情形，$\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 为正交活动标架意味着

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j=1,2,3.$$

微分得：$\underbrace{\langle de_i, e_j \rangle}_{\omega_i^j} + \underbrace{\langle e_i, de_j \rangle}_{\omega_j^i} = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0$$

特别地 $\omega_i^i = 0$, $i=1,2,3$.

综上，我们得正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 的运动方程为

$$dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$$

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

§4.2 第一基本形式和第二基本形式

我们来考查在正交活动标架下，第一、第二基本形式之表达式

回忆，对任意曲面M上切向量场 V, W，有

Weingarten变换

$$\mathrm{I}(V,W) = \langle V, W \rangle, \quad \mathrm{II}(V,W) = \langle \mathcal{W}(V), W \rangle = \langle V, \mathcal{W}(W) \rangle.$$

首先看到 $\mathrm{I}(V,W) = \langle V, W \rangle = \big\langle \langle V,e_1\rangle e_1 + \langle V,e_2\rangle e_2,\ \langle W,e_1\rangle e_1 + \langle W,e_2\rangle e_2 \big\rangle$

$$= \langle V,e_1\rangle\langle W,e_1\rangle + \langle V,e_2\rangle\langle W,e_2\rangle$$

$$= \omega^1(V)\omega^1(W) + \omega^2(V)\omega^2(W), \quad \forall V, W.$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2}$$

~~下面我们来考查 Weingarten 变换. 回忆它是自共轭线性变换.~~

记它在基 ~~B~~ e_1, e_2 下的矩阵为:

$$W\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_1^1 & h_1^2 \\ h_2^1 & h_2^2 \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop B}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

回忆

$$\begin{pmatrix} -n_1 \\ -n_2 \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = W\left(A\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} W(e_1) \\ W(e_2) \end{pmatrix}$$

$$= AB\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

注意到 $de_3 = dn = (n_1 \;\; n_2)\begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix}$

$$= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \qquad (\maltese)$$

$$= -(\omega_1^3 \;\; \omega_2^3)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

且(**)可改写为 $\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix}$.

由 $(\maltese) \Rightarrow (du^1 \;\; du^2)\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = -(\omega_1^3 \;\; \omega_2^3)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

~~应用~~ $(du^1 \;\; du^2)A = (\omega^1 \;\; \omega^2) \Rightarrow (du^1 \;\; du^2) = (\omega^1 \;\; \omega^2)A^{-1}$.

$$\Rightarrow -(\omega^1 \;\; \omega^2)A^{-1}\begin{pmatrix} W(r_1) \\ W(r_2) \end{pmatrix} = -(\omega^1 \;\; \omega^2)A^{-1}AB\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

$$= -(\omega^1 \;\; \omega^2)B\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = -(\omega_1^3 \;\; \omega_2^3)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

这告诉我们

$$\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix} = B^T\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_1^1 & h_2^1\\ h_1^2 & h_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$$

即
$$\begin{cases}\omega_1^3 = h_1^1\omega^1 + h_2^1\omega^2\\ \omega_2^3 = h_1^2\omega^1 + h_2^2\omega^2\end{cases}$$

下面回到第二基本形式 II 的讨论.

易见
$$\langle \mathcal{W}(V), W\rangle = \left(\langle V,e_1\rangle\ \ \langle V,e_2\rangle\right)\begin{pmatrix}h_1^1 & h_1^2\\ h_2^1 & h_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle W,e_1\rangle\\ \langle W,e_2\rangle\end{pmatrix}$$

$$\langle V, \mathcal{W}(W)\rangle = \left(\langle V,e_1\rangle\ \ \langle V,e_2\rangle\right)\begin{pmatrix}h_1^1 & h_2^1\\ h_1^2 & h_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle W,e_1\rangle\\ \langle W,e_2\rangle\end{pmatrix}.$$

故 $\mathcal{W}$ 的自共轭性 $\Rightarrow$ $B = B^T$ 为对称阵.

又注意到

$$\mathrm{II}(V,W) = \left(\omega^1(V)\ \ \omega^2(V)\right) B \begin{pmatrix}\omega^1(W)\\ \omega^2(W)\end{pmatrix}$$

$$= \left(\omega^1(V)\ \ \omega^2(V)\right)\begin{pmatrix}\omega_1^3(W)\\ \omega_2^3(W)\end{pmatrix}$$

$$= \omega^1(V)\,\omega_1^3(W) + \omega^2(V)\,\omega_2^3(W), \quad \forall\, V, W.$$

因此，有

$$\boxed{\mathrm{II} = \omega^1\otimes\omega_1^3 + \omega^2\otimes\omega_2^3}$$

回忆我们在自然标架下讨论 I, II 时，证明了 I, II 与曲面参数选取无关，II 与同定向的参数选取无关。在正交活动标架下，我们有：

<u>命题4.1</u> 曲面的第一基本形式与正交标架的选取无关；曲面的第二基本形式和<u>同法向</u>的正交标架的选取无关。

~~证明~~：要证明命题4.1，只须证把 $\{e_1, e_2\}$ 旋转一下，变成 $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$，i.e.

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

后，第一基本形式 $\mathrm{I} = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2$ 不变. 当 $\bar{e}_3 = e_3$ 时，第二基本形式 $\mathrm{II} = \omega^1 \otimes \omega_1^3 + \omega^2 \otimes \omega_2^3$ 不变.

为此目的，我们先考查 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^3, \omega_2^3$ 的变化

~~因此~~ 因为对任一切向量场

$$X := (X^1 \quad X^2) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (X^1 \quad X^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}^1(X) = \langle X, \bar{e}_1 \rangle = \cos\theta X^1 + \sin\theta X^2$$

$$= \cos\theta\, \omega^1(X) + \sin\theta\, \omega^2(X) \quad \forall X$$

$$\bar{\omega}^2(X) = \langle X, \bar{e}_2 \rangle = -\sin\theta\, \omega^1(X) + \cos\theta\, \omega^2(X), \ \forall X$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}^1 = \cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2 \\ \bar{\omega}^2 = -\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2 . \end{cases}$$

因此，我们可检查

$$\bar{\mathrm{I}} = \bar{\omega}^1 \otimes \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}^2 \otimes \bar{\omega}^2 = (\cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2) \otimes (\cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2)$$

$$+ (-\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2) \otimes (-\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2)$$

$$= \cos^2\theta\, \omega^1 \otimes \omega^1 + \cos\theta \sin\theta\, \omega^1 \otimes \omega^2 + \sin\theta\cos\theta\, \omega^2 \otimes \omega^1 + \sin^2\theta\, \omega^2 \otimes \omega^2$$

$$+ \sin^2\theta\, \omega^1 \otimes \omega^1 - \sin\theta\cos\theta\, \omega^1 \otimes \omega^2 - \sin\theta\cos\theta\, \omega^2 \otimes \omega^1 + \cos^2\theta\, \omega^2 \otimes \omega^2$$

$$= \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 = \mathrm{I}$$

~~记~~ $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 则有 $\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

故而设 $\omega\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}=\bar{B}\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}$

$\omega\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\cancel{B=R_\theta^{-1}}$ $\bar{B}=R_\theta B R_\theta^{-1}$

同时 $\begin{pmatrix}\bar{\omega}_1^3\\ \bar{\omega}_2^3\end{pmatrix}=\bar{B}\begin{pmatrix}\bar{\omega}_1\\ \bar{\omega}_2\end{pmatrix}=\bar{B}R_\theta\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$

$=R_\theta B\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=R_\theta\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}.$

即 $\begin{cases}\bar{\omega}_1^3=\cos\theta\,\omega_1^3+\sin\theta\,\omega_2^3\\ \bar{\omega}_2^3=-\sin\theta\,\omega_1^3+\cos\theta\,\omega_2^3\end{cases}$

这样我们可检查

$\bar{\mathrm{II}}=\bar{\omega}^1\otimes\bar{\omega}_1^3+\bar{\omega}^2\otimes\bar{\omega}_2^3=\omega^1\otimes\omega_1^3+\omega^2\otimes\omega_2^3=\mathrm{II}$. □

在本节最后，我们讨论如下注记.

注记：回忆前面关于 ~~Warg~~ Weingarten 变换的讨论知矩阵 $B=\begin{pmatrix}h_1^1 & h_1^2\\ h_2^1 & h_2^2\end{pmatrix}$ 的特征值是曲面的主曲率，其行列式 $\det B$ 为曲面的高斯曲率，其 trace 的 $\frac{1}{2}$ 为曲面的平均曲率。

当曲面没有脐点时，我们可取特别的正交活动标架

$\{r;e_1,e_2,e_3\}$

其中 e_1,e_2 为该点处的主方向. 这时 Weingarten 变换在基 $\{e_1,e_2\}$ 下的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}$$

为对角阵。此时 $\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}.$

补 1781

主曲率

即 $\omega_1^3 = k_1\omega^1$, $\omega_2^3 = k_2\omega^2$.

$\Rightarrow$ 曲面第二基本形式 $\mathrm{II} = k_1\omega^1\otimes\omega^1 + k_2\omega^2\otimes\omega^2$.