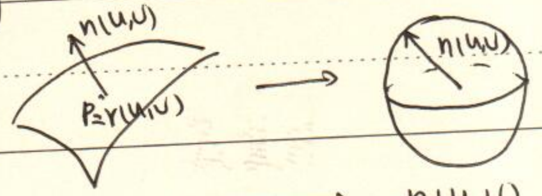
§8 Weingarten 变换和主曲率

(自共轭线性变换) Weingarten 变换及其特征值

回忆高斯曲率的定义由高斯映射

$$g: M \longrightarrow S^2$$



$$r(u,v) \longmapsto n(u,v)$$

给出: $K(p) = \dfrac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$. 实际上,更精确地说,高斯曲率是由如下映射给出:

$$T_pM \longrightarrow T_{g(p)}S^2$$

$$r_u \longmapsto n_u$$

$$r_v \longmapsto n_v$$

~~这样的线性映射可由 Gauss 映射 g in differential 给出~~。我们把上述映射延拓为两个切平面 $T_pM \longrightarrow T_{g(p)}S^2$ 之间的一个线性映射: 也即, $\forall\ v = \lambda r_u + \mu r_v \in T_pM$, ~~we def~~ 我们定义

$$v = \lambda r_u + \mu r_v \longmapsto \lambda n_u + \mu n_v. \qquad (*)$$

注记: 这个映射其实就是 Gauss map $g: M \to S^2$ in differential. 当然,我们只解释过欧氏空间之间映射的 differential. 在这里可把 $g: M \to S^2$ 看作 $g: M \to \mathbb{R}^3$. 则对 M 上一曲线 $c(s)$ 满足

$$c(0) = p, \qquad c'(0) = v$$

有 $dg_p(v) = \dfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} g(c(s))$

$p = (u_0, v_0)$

特别地,有 $dg_p(r_u) \overset{\text{取 } c(u)=r(u,v_0)}{=\!=\!=\!=} \dfrac{d}{du}\Big|_{u=u_0} g(r(u,v_0)) = n_u(u_0,v_0)$

$dg_p(r_v) \overset{\text{取 } c(v)=r(u_0,v)}{=\!=\!=\!=} n_v(u_0,v_0)$. □

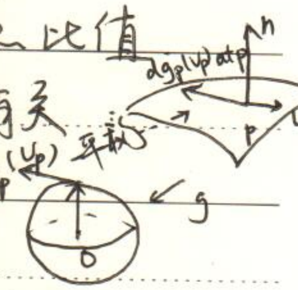
接下来,我们就记映射 $(*)$ 为 dg_p.

我们还要注意关于高斯曲率定义 $K(p)=\dfrac{n_u\wedge n_v}{r_u\wedge r_v}$ 的解释:

之所以比值 $\dfrac{n_u\wedge n_v}{r_u\wedge r_v}$ 有意义, 是因为这两个向量平行. 但注意到 $r_u\wedge r_v\in T_p\mathbb{R}^3$, $n_u\wedge n_v\in T_{g(p)}\mathbb{R}^3$.

我们实际上是把 $n_u\wedge n_v$ 平移到点 p 再做的比值

因此, 更精确地, 高斯曲率与如下映射有关



$$W':\ T_pM\xrightarrow{dg_p}T_{g(p)}S^2\xrightarrow{\text{平行移动}}T_pM$$

$$\lambda r_u+\mu r_v\longmapsto\lambda n_u+\mu n_v\longmapsto\lambda(n_u)_p+\mu(n_v)_p.$$

我们称线性变换 $W:=-W'$: $\underset{\text{2-维向量空间}}{T_pM}\longrightarrow T_pM$ 为曲面的 Weingarten 变换。(符号只是技术性原因,不是本质的)

所以, 曲面在 p 点处的高斯曲率

$$K(p)=\frac{W(r_u)\wedge W(r_v)}{r_u\wedge r_v}.$$

注意到 r_u,r_v 线性无关, 张成切平面 T_pM. 我们考虑 W 在基 $\{r_u,r_v\}$ 下的矩阵:

$$W\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\end{pmatrix}$$

进而有

$$K(p)=\frac{(ar_u+br_v)\wedge(cr_u+dr_v)}{r_u\wedge r_v}=\det\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}$$

也即 高斯曲率是 Weingarten 变换的 determinant !!

下面我们来更进一步地讨论这个有趣的 Weingarten 变换

性质 8.1: 对曲面(片)M 上点 p 处的任意切向量 $V,W\in T_pM$, 有: $\mathrm{II}(V,W)=\langle W(V),W\rangle$

证明：设 M 可表为 $r = r(u,v)$，$V = \lambda r_u + \mu r_v$，$W = \xi r_u + \eta r_v$

则 $\langle \mathcal{W}(V), W\rangle = \langle -\lambda (n_u)_p - \mu (n_v)_p, \xi r_u + \eta r_v\rangle$

$= -\langle (n_u)_p, r_u\rangle \lambda\xi - \langle (n_u)_p, r_v\rangle \lambda\eta - \langle (n_v)_p, r_u\rangle \mu\xi - \langle (n_v)_p, r_v\rangle \mu\eta$

$= L\lambda\xi + M\lambda\eta + M\mu\xi + N\mu\eta$

$= (L\, du\otimes du + M\, du\otimes dv + M\, dv\otimes du + N\, dv\otimes dv)(V, W)$

$= \mathrm{II}(V,W)$. □

注记：我们之前定义 $L = \langle r_{uu}, n\rangle$，$r_{uu}, n \in T_p\mathbb{R}^3$。
后用 $\langle r_u, n\rangle = 0$ 求导得 $\langle r_u, n_u\rangle + \langle r_{uu}, n\rangle = 0$
实际上已用了等同 $n_u = (n_u)_p$。~~(…)~~

注记：回忆对第一基本形式，我们有：$\forall\, V, W \in T_pM$，

$$\mathrm{I}(V,W) = \langle V, W\rangle.$$

注意第一、第二基本形式（first/second fundamental form）都不是 2-form !!（2-form 要有性质 $\varphi(V,W) = -\varphi(W,V)$）。~~…~~ 事实上，$\mathrm{I}(V,W) = \mathrm{I}(W,V)$
注意 $\mathrm{II}(V,W) = \mathrm{II}(W,V)$ （$\Leftarrow r_{uv} = r_{vu}$）
在我们关于曲面论的讨论中，我们实际用到的是下面两个函数：

$V \longmapsto \mathrm{I}(V,V) \quad \forall\, V \in T_pM$

$V \longmapsto \mathrm{II}(V,V) \quad \forall\, V \in T_pM.$

也即相应的"二次型"。从这个角度说，$\mathcal{W}$ 是二次型 $V \mapsto \mathrm{II}(V,V)$ 相对应的线性变换。 □

推论 8.2．~~Weig~~ Weingarten 变换是 $T_pM \to T_pM$ 的自共轭变换，即：$\forall\, V, W \in T_pM$，有

$$\langle \mathcal{W}(V), W\rangle = \langle V, \mathcal{W}(W)\rangle$$

注记：回忆一般地对向量空间 V，赋一内积 $\langle\ ,\ \rangle$，则一个线性

变换 $T: V \to V$ 称为自共轭的如果以下性质满足：

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle, \quad \forall\, v, w \in V.$$

这等价于说 T 关于 V 的一个标准正交基的矩阵是对称的.
自共轭线性变换的一个主要结果是说 $T: V \to V$ 的特征向量 $v_1, \cdots, v_n$ 组成 V 的一个基.

· 相应于不同特征值 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 的特征向量 v_i, v_j 正交，i.e. $\langle v_i, v_j\rangle = 0$

(原因：$\langle Tv_i, v_j\rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j\rangle$
$= \langle v_i, Tv_j\rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j\rangle \xRightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} \langle v_i, v_j\rangle = 0$)

· 如果多个特征向量对应于同一个特征值 λ，那么这些特征向量张成的子空间中任一向量均为特征向量. 我们可以取这个子空间的一组标准正交基.

综上，取单位长特征向量，我们可得 V 的一个标准正交基. □

回到我们的情形，我们可找到 T_pM 的标准正交基 $\{e_1, e_2\}$ 使

$$W(e_i) = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2.$$

那这两个特征值 λ_1, λ_2 有没有几何意义呢？

注意到高斯曲率 $K(p) = \det(W) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

且 $k_n(e_i) = \mathrm{II}(e_i, e_i) = \langle W(e_i), e_i\rangle = \lambda_i, \ i = 1, 2.$

自然的问题：λ_1, λ_2 会不会是该点处的两个主曲率？

Yes!

这是因为对任一单位向量 $v = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$，我们有

$$\begin{aligned}
k_n(v) &= \mathrm{II}(v, v) = \langle W(v), v\rangle \\
&= \langle \cos\theta\, W(e_1) + \sin\theta\, W(e_2), \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2\rangle \\
&= \langle \lambda_1 \cos\theta\, e_1 + \lambda_2 \sin\theta\, e_2, \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2\rangle \\
&= \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_2 \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

故 λ_1, λ_2 确为所有主曲率中之最大、最小值！这是给 Euler 公式的一个重新证明.

注记：从这个角度讲，Euler 的结果是如下代数结果之几何版本：

$T: V \to V$ 是 2-dim 线性空间 V 之间之自共轭线性变换，则其两个特征值 $\lambda_1 \le \lambda_2$ 满足：

$$\lambda_1 = \min_{\langle v,v\rangle=1} \langle Tv, v\rangle, \qquad \lambda_2 = \max_{\langle v,v\rangle=1} \langle Tv, v\rangle.$$

(min-max principle)

$\boxed{\text{高斯曲率之第二种计算公式}}$

上述关于高斯曲率和法曲率之"重新思考"给出高斯曲率之另一种计算公式：

$$K(p) = \frac{W(r_u) \wedge W(r_v)}{r_u \wedge r_v} = \det(W)$$

在 T_pM 的由 W 之特征向量 e_1, e_2 给出之标准正交基下，$K(p) = \lambda_1\lambda_2$.

在 T_pM 的基 $\{r_u, r_v\}$ 下，我们如果记

$$W\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

则有 $K(p) = \det(W) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

由于 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n_u)_p \\ -(n_v)_p \end{pmatrix}$

我们有

$$L = \langle -(n_u)_p, r_u\rangle = \langle a r_u + b r_v, r_u\rangle = aE + bF$$

$$M = \langle -(n_u)_p, r_v\rangle = aF + bG$$

$$M = \langle -(n_v)_p, r_u\rangle = cE + dF$$

$$N = \langle -(n_v)_p, r_v\rangle = cF + dG.$$

也就是说：

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad (***)$$

故而有 $K(p) = \det(W_p) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \boxed{K(p) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (\text{☆☆})}$$

<u>注记</u>: (***) on page 101 的另一种看法

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle -(n_u)_p, r_u \rangle & \langle -(n_u)_p, r_v \rangle \\ \langle -(n_v)_p, r_u \rangle & \langle -(n_v)_p, r_v \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(n_u)_p \\ -(n_v)_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u^t & r_v^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u^t & r_v^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$