

§9 Willmore 能量

Willmore, Note on embedded surfaces, An. Sti. Univ.

"Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N.S.) 11B (1965) 493-496.

(Dedicated to Prof Professor Octav Mayer on his 70-th birthday)

Willmore 在其 1965 年的文章中 对 Gauss-Bonnet 定理 作如下看法: 令 M 为一个光滑的、紧致无边、可定向曲面, $f: M \rightarrow E^3$ 为 M 到 3 维欧氏空间的光滑嵌入. 则 $f(M)$ 上有一个 E^3 上欧氏度量的自然诱导的“度量结构”(第一基本形式). 则对 $\forall p \in f(M)$, 有高斯曲率 $K(p)$. 在这种情况下, Gauss-Bonnet 定理说

$$\frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} K dV = \chi(M)$$

上式的右端不依赖于嵌入 $f: M \rightarrow E^3$ 的选取.

在这种观点下, Willmore 考虑如果把上式左端的高斯曲率替换成平均曲率平方 H^2 , 所得量

$$\tau(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} H^2 dV$$

是否是 M 的一个拓扑量?

注意平均曲率 H 依赖于嵌入 f 的选取, $\tau(f)$ 一般不是一个拓扑量. 因此, 我们定义

$$\tau(M) := \inf_{f \in \mathcal{F}} \tau(f)$$

其中下确界取在 $\mathcal{F} = \{ \text{所有 } M \rightarrow E^3 \text{ 的光滑嵌入} \}$ 上. 则 $\tau(M)$ 就是 M 的一个拓扑不变量了.

问题: $\tau(M)$ 和 $\chi(M)$ 有什么关系呢?

定理 1 (Willmore, 1965) 设 M 为亏格 $g=0$ 的曲面. (C^∞ , closed, orientable)

则有 $\tau(M) = \chi(M)$

且 $\tau(f) = 2$ 当且仅当 $f(M)$ 是一个球面.

证明. 设 $f(M)$ 每点处的主曲率为 k_1, k_2 . 则有

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\text{由于 } H^2 = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 = \frac{1}{4}(k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2)$$

$$= k_1 k_2 + \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2)$$

$$= K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2$$

我们有

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} H^2 dV = \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} K dV + \frac{1}{8\pi} \int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV$$

$$\stackrel{\text{Gauss-Bonnet}}{=} \chi(M) + \frac{1}{8\pi} \int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV$$

因此有 $\tau(f) \geq \chi(M), \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

当 $\tau(f) = \chi(M)$, 则有 $\int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV = 0 \Rightarrow k_1(p) = k_2(p), \quad \forall p \in f(M)$

从而 $f(M)$ 为全脐点曲面, 故而只能是球面; 此时 $\chi(M) = 2, g = 0$. □

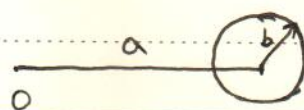
自然地一个问题: 如果曲面 M 的亏格 $g \geq 1$, $\tau(M)$ 是否有更好的下界?

对于亏格 $g=1$ 的曲面, 即环面, Willmore 考虑了如下特别的一类

嵌入: 环面 $T: f: T \rightarrow E^3$

这里 $f(T)$ 由如下坐标给出: $f(T) = r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = (a + b \cos u) \sin v \\ z = b \sin u \end{cases}$$



且有 $r_u = (-b \sin u \cos u, -b \sin u \sin u, b \cos u)$

$$r_v = (-(a+b \cos u) \sin u, (a+b \cos u) \cos u, 0)$$

进而计算 $E = \langle r_u, r_u \rangle = b^2 \sin^2 u \cos^2 u + b^2 \sin^2 u \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$
 $= b^2$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = b(a+b \cos u) \sin u \sin u \cos u - b(a+b \cos u) \sin u \sin u \cos u$$

 $= 0$

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = (a+b \cos u)^2 \sin^2 u + (a+b \cos u)^2 \cos^2 u$$

 $= (a+b \cos u)^2$

由此可计算

$$r_u \wedge r_v = \begin{pmatrix} -(a+b \cos u) b \cos u \cos u, & -(a+b \cos u) b \cos u \sin u, \\ & -(a+b \cos u) b \sin u \end{pmatrix}$$

$$|r_u \wedge r_v|^2 = (a+b \cos u)^2 b^2$$

也即 $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} = (-\cos u \cos u, -\cos u \sin u, -\sin u)$

$$\Rightarrow n_u = \begin{pmatrix} \sin u \cos u, & \sin u \sin u, & -\cos u \end{pmatrix}$$

$$n_v = \begin{pmatrix} \cos u \sin u, & -\cos u \cos u, & 0 \end{pmatrix}$$

进而得 $L = -\langle r_u, n_u \rangle = -[-b \sin^2 u \cos^2 u - b \sin^2 u \sin^2 u - b \cos^2 u]$
 $= b$

$$M = -\langle r_u, n_v \rangle = -[-b \sin u \cos u \sin u \cos u + b \sin u \cos u \sin u \cos u]$$

 $= 0$

$$N = -\langle r_v, n_v \rangle = -[-(a+b \cos u) \sin^2 u \cos u - (a+b \cos u) \cos^2 u \cos u]$$

 $= (a+b \cos u) \cos u$

则平均曲率 $H = \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

我们计算 $H = \frac{1}{2} \frac{b(a+b\cos u)^2 + b^2(a+b\cos u)\cos u}{b^2(a+b\cos u)^2}$

$$= \frac{1}{2} \frac{(a+b\cos u) + b\cos u}{b(a+b\cos u)} = \frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)}$$

回到 $\tau(T)$ 的计算. 我们有.

$$\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H^2 \cdot \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)} \right)^2 \cdot b(a+b\cos u) \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a+2b\cos u)^2}{4b(a+b\cos u)} \, du \, dv$$

$\frac{1}{2} \frac{b}{a} = c$, 则 $\frac{1}{4c}$

$$\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+2c\cos u)^2}{c(1+c\cos u)} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{4c} \int_0^{2\pi} \frac{(1+2c\cos u)^2}{1+c\cos u} \, du$$

$$= \frac{1}{4c} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-c^2}}$$

观察到当 $c \rightarrow 0$ (即环面很小时) $\tau(f_{a,b}) \rightarrow \infty$

当 $c \rightarrow 1$ (即环面很粗时) $\tau(f_{a,b}) \rightarrow \infty$.

所以当 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\tau(f_{a,b})$ 取最小值 π .

"It seems reasonable to interpret $\tau(f)$ as a measure of the "niceness" of the shape of the surface $f(M)$, and to argue heuristically that a small value of $\tau(f)$ corresponds to a simple

shape for ~~an~~ $f(M)$. This suggests that $f_{a,b}$ with $b/a = 1/\sqrt{2}$ gives the nicest shape for an embedded torus. However, whether or not $\tau(T) = \pi$ remains an open question. The problem for surfaces of genus $g \geq 2$ remains unsolved."

Willmore 猜想: the problem of determining the best torus among all.

实际上 Willmore energy 作为一种描述弹性薄膜的 elastic or bending energy 能量早在 1810s 就由 Sophie Germain 研究过. 在数学上, Willmore energy 被 Blaschke 和他的学生 Thomassen 于 1920s 在研究共形映射 (conformal Gauss map) 时研究过.

Marques, Neves, Min-max theory and the Willmore conjecture, Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 2, 683-782 上面得到的环面 $f_{a,b}(T)$, $b/a = 1/\sqrt{2}$ 是一种非常特殊的曲面, 在任何研究中已经出现过. 实际上, 存在单位球面

$$S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

上的球极投影 (即从 S^3 去掉一点到 \mathbb{R}^3) 把 Clifford 环面

$$\Sigma = S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

映射 (onto) $f_{\sqrt{2},1}(T)$.

定理 (Marques - Neves). \mathbb{R}^3 中每一个具有正亏格的嵌入紧致曲面满足

$$\tau(M) \geq \pi.$$

等号成立当且仅当 M 为 Clifford 环面的球极投影像.

Willmore conjecture 之研究 激发了很多领域数学之研究
包括共形映射, PDEs, 代数几何, 几何测度论等.

一个很重要的看法是 Willmore energy 与 S^3 中 紧致
曲面之面积泛函有密切关系. Clifford torus 是 S^3 的一个 极
小曲面.

1991. 物理学家 Bensimon and Muty 在研究 ~~薄~~
薄膜时 借助显微镜实验上验证了 Willmore conjecture.

Observation of toroidal vesicles, Phys. Rev. A, 43(1991)
4525-4527.

"自然而真实的"