主曲率

即 $\omega_1^3 = k_1\omega^1$, $\omega_2^3 = k_2\omega^2$.

$\Rightarrow$ 曲面第二基本形式 $\mathrm{II} = k_1\omega^1\otimes\omega^1 + k_2\omega^2\otimes\omega^2$.

§5. 微分形式和外微分运算

在第一章 §8 节的讨论中我们介绍了 R^3 上的 1-form. 一个 1-form ϕ 定义为所有切向量集合 TR^3 上的函数. 限制在一点 p 处

$$\phi_p : T_p(R^3) \longrightarrow R$$

是线性函数.

考虑一正则曲面(片) M. 我们有 M 上的 1-form ϕ: 即 ϕ 为 M 所有切向量集合上的函数, 限制在一点 $p\in M$ 处,

$$\phi_p : T_pM \longrightarrow R$$

是线性函数

同样地, ϕ 作用在 M 的(光滑)切向量场上得 M 上一(光滑)函数。~~对 $r=r(u,v)$ 的自然标架 $\{r_u, r_v\}$ 在每点处构成 T_pM 的一组基 故而 $\forall$ 切向量场 V, 有~~

$$\cancel{V(p) = \langle V(p), r_u\rangle r_u + \langle V(p), r_v\rangle r_v \quad \forall p}$$

~~换言之~~

在考虑自然标架 $\{r; r_u, r_v, n\}$ 或正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 的运动方程时, 我们要写出活动标架沿曲面的任一切方向的变化规律。写出标架沿任一切方向运动规律的一个有效方式(记号)就是 1-form.

$$\begin{cases} dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j \end{cases}$$

实际上是

$$\begin{cases} dr(V) = \omega^1(V)e_1 + \omega^2(V)e_2 \\ de_i(V) = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j(V)\, e_j \end{cases} \qquad \forall \text{ 切向量 } V.$$

回忆 $dr = (dx(u,v), dy(u,v), dz(u,v))$，也即 我们把 r 看作是曲面片 M 的欧氏坐标函数. 因此有对任意切向量 V，

$$dr(V) = V.$$

$\left(\because dr(V)(p) = \frac{d\,c(s)}{ds}\Big|_{s=0} = V, \right.$ where c 是 M 上过 p 点曲线满足 $c(0)=p$, $c'(0) = V$.)

同时有 $V = \langle V, e_1\rangle e_1 + \langle V, e_2\rangle e_2$

由上节课讨论的 ω^1, ω^2. 知 $\underbrace{V}_{dr(V)} = \omega^1(V)e_1 + \omega^2(V)e_2$, $\forall V$

这实际上从另一角度重新证明了 $dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$.

$dr(V)$ 给出了坐标函数沿切方向 V 的变化规律. $de_i(V)$ 给出了标架向量场 e_i 沿切向 V 的变化规律.

定义 5.1 设 M 为正则曲面片. $\{e_1, e_2\}$ 为 M 上的处处标准正交切向量场。设 θ^1, θ^2 为 M 上的 1-form. 如果对任意 $p \in M$, $v \in T_pM$，有 $\theta^i(v) = \langle v, e_i(p)\rangle$.
则称 θ^1, θ^2 分别为 e_1, e_2 的对偶 1-form.

类似地，令 $\{E_1, E_2, E_3\}$ 为 R^3 上的处处标准正交向量场。设 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ 为 R^3 上 1-form. 如果对任意 $p \in R^3$, $v \in T_pR^3$, 有

$$\theta^i(v) = \langle v, E_i(p)\rangle.$$

则称 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ 分别为 E_1, E_2, E_3 的对偶 1-form. □

特别地在 M 上，有 $\theta^i = \omega^i$.

引理 5.2 令 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ (θ^1, θ^2, resp.) 为 E_1, E_2, E_3 (e_1, e_2, resp.) 的对偶 1-form. 则 R^3 (M, resp) 上任意 1-form ϕ 均可唯一表为

$$\phi = \sum_i \phi(E_i)\theta^i \qquad \left(\phi = \sum \phi(e_i)\theta^i\right)$$

证明：只证 $\mathbb{R}^3$ 的情形。要验证两个 1-form 相同，只需验证它们在任一向量场 V 上取值相同。

$$\phi(V) = \left(\sum_i \phi(E_i)\,\theta^i\right)(V) = \sum_i \phi(E_i)\,\theta^i(V)$$

$$= \phi\left(\sum_i \theta^i(V) E_i\right)$$

$$= \phi\left(\sum_i \langle V, E_i\rangle E_i\right) = \phi(V). \quad \forall V. \quad \square$$

1-form 只是一套更大的"微分形式"系统的特别例子。我们可以继续考虑"2-form"：我们下面对 $\mathbb{R}^3$ 上的微分形式作一简要的介绍。

记 (x^1, x^2, x^3) 为 $\mathbb{R}^3$ 的欧式坐标函数。回忆

$$U_1(p) = (1,0,0)_p, \quad U_2(p) = (0,1,0)_p, \quad U_3(p) = (0,0,1)_p$$

给出 $\mathbb{R}^3$ 的自然标架场。则 dx^i 为 U_i 的对偶 1-形式。

我们前面介绍过一种 dx^i、dx^j 的乘积：

张量积：$dx^i \otimes dx^j$：$T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ （限制在 p 点）

$$(v, w) \mapsto dx^i(v)\,dx^j(w).$$

我们考虑另外一种遵循 Altenative rule 的乘积：

外积：$dx^i \wedge dx^j = -\,dx^j \wedge dx^i$.

Alternative rule ⇒ "repeats are zero".

$$dx^i \wedge dx^i = 0$$

回忆：0-form：$\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数

1-form：$f_i dx^i$

2-form：$f\,dx^1\wedge dx^2 + g\,dx^1\wedge dx^3 + h\,dx^2\wedge dx^3$

3-form：$f\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$

但是对 p-form，$p \geq 4$，乘积中必有重复的 dx^i，故均为 0.

我们可以把外积运算线性延拓，从而可定义任两个 1-form，1-form 和 2-form 之间的外积。

引理 5.3：令 ϕ, ψ 为 1-form，则有

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi .$$

证明：可写 $\phi = \sum f_i dx^i$, $\psi = \sum g_i dx^i$.

则有 $\phi \wedge \psi = \sum f_i g_j dx^i \wedge dx^j = -\sum g_j f_i dx^j \wedge dx^i$

$$= -\left(\sum g_j dx^j\right) \wedge \left(\sum f_i dx^i\right) = -\psi \wedge \phi . \qquad \square$$

定义 5.4（外微分）设 $\phi = \sum f_i dx^i$ 为 R^3 上 1-form，则 ϕ 的外微分 $d\phi$ 定义为 2-form：$d\phi := \sum_i df_i \wedge dx^i$.

注记：写开可得

$$d\phi = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 .$$

定理 5.5 设 f, g 为 ~~[illegible]~~ 0-forms，ϕ, ψ 为 1-forms. 则有.

(i) $d(fg) = (df)g + f(dg)$

(ii) $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi$

(iii) $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$.

证明：(i) 是前面讨论 1-form 时证明得的公式. 这里可以把 d 看作是对 0-form 求外微分得 1-form.

(ii), (iii) 可先对 $\varphi = f dx^1$, $\psi = g dx^2$ 证，再由 d 的线性性得一般结论. 例如

$$d(\phi \wedge \psi) = d(fg\, dx^1 \wedge dx^2) = \frac{\partial (fg)}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^3} g + f \frac{\partial g}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$(d\phi \wedge \psi) = d(f dx^1) \wedge g dx^2 = \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge (g dx^2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^3} g\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 .$$

$$\phi\wedge d\psi = f\,dx^1\wedge d(g\,dx^2) = f\,dx^1\wedge\left(\frac{\partial g}{\partial x^3}\,dx^3\wedge dx^2\right)$$

$$= -f\frac{\partial g}{\partial x^3}\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.$$

综上，有 $d(\phi\wedge\psi) = d\phi\wedge\psi\ \cancel{+} - \phi\wedge d\psi.$ □

注记：微分形式，以及相应的外积和外微分运算提供了一种表达含有多种偏导数之各种关系的高效方式。比方说，外微分实际上统一了经典向量分析中的三类导数：

我们把 1-form, 2-form 和向量场作如下一一对应

$$\sum_i f_i\,dx^i \xleftrightarrow{(1)} \sum_i f_i u_i \xleftrightarrow{(2)} f_3\,dx^1\wedge dx^2 - f_2\,dx^1\wedge dx^3 + f_1\,dx^2\wedge dx^3$$

$$\cancel{(-1)^{i+1} f_i\,dx^1\wedge dx}$$

则有：(a) $df \xleftrightarrow{(1)} \operatorname{grad} f$. 回忆梯度 $\operatorname{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} u_i$

(b) If $\underset{\sum f_i dx^i}{\underset{\parallel}{\phi}} \xleftrightarrow{(1)} \underset{\sum f_i u_i}{\underset{\parallel}{V}}$, 则 $d\phi \xleftrightarrow{(2)} \operatorname{curl} V$.

回忆旋度 $\operatorname{curl} V = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right)u_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}\right)u_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right)u_3.$

(c) If $\eta \xleftrightarrow{(2)} \underset{\sum_i f_i u_i}{\underset{\parallel}{V}}$, 则有 $d\eta = (\operatorname{div} V)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.$

回忆散度 $\operatorname{div} V = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x^i}.$

总结：$\{0\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{1\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{2\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{3\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{0\}$

回到曲面片M上的微分形式的讨论. ~~设~~ M上任意 1-form ϕ 可写成 du^1, du^2 的线性组合:

$$\phi = f_1\, du^1 + f_2\, du^2 .$$

类似地, 我们也有外积 $du^1 \wedge du^2 = - du^2 \wedge du^1$

同样地讨论知 M上有 0-form, 1-form, 2-form.
$f\, du^1 \wedge du^2$

所有M上 p-form, $p \geq 3$ 为0.

~~实际上, M上的2-form 只可写作~~

对任意 1-form: $\phi = f_1 du^1 + f_2 du^2$, $\psi = g_1 du^1 + g_2 du^2$

有:
$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi &= f_1 g_2\, du^1 \wedge du^2 + f_2 g_1\, du^2 \wedge du^1 \\ &= (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, du^1 \wedge du^2 \\ &= \det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix} du^1 \wedge du^2 .\end{aligned}$$

同样可定义外微分运算 d:

$$\{0\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{1\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{2\text{-forms}\} \xrightarrow{d} \{0\}.$$

(i) $df = \dfrac{\partial f}{\partial u^1} du^1 + \dfrac{\partial f}{\partial u^2} du^2$

(ii) $$\begin{aligned} d\phi &= d(f_1 du^1 + f_2 du^2) = df_1 \wedge du^1 + df_2 \wedge du^2 \\ &= \left(-\frac{\partial f_1}{\partial u^2} + \frac{\partial f_2}{\partial u^1}\right) du^1 \wedge du^2 .\end{aligned}$$

(iii) $\forall\, \varphi = f\, du^1 \wedge du^2$, $d\varphi = df \wedge du^1 \wedge du^2 = 0$.

可以验证性质 (a). $d(fg) = (df)\cdot g + f(dg)$

(b) $d(f\phi) = df \wedge \phi + f\, d\phi$.

定理5.6. 设 f 为M上 0-form. 则有
$$d(df) = 0 .$$

证明: $d(df) = d\left(\dfrac{\partial f}{\partial u^i} du^i\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1} du^2 \wedge du^1 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2} du^1 \wedge du^2$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1}\right) du^1 \wedge du^2 = 0. \qquad \square$$

在这里可以看到，标架运动方程的可积性条件，i.e.，mixed partials equal 可表述为 $d^2 = 0$!!

（关于曲面上微分形式的更详细讨论，参见 [ONeill §4.4]）

下面我们讨论一下外积、外微分运算的几何应用：

性质 5.7. (i) $\omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG-F^2}\, du^1 \wedge du^2$ 体积元

(ii) $\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = K\, \omega^1 \wedge \omega^2$. K 高斯曲率

(iii) $\omega_1^3 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega_2^3 = 2H\, \omega^1 \wedge \omega^2$.

证明：回忆 补 172 页，设若

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (1) \qquad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle r_1, r_1\rangle & \langle r_1, r_2\rangle \\ \langle r_2, r_1\rangle & \langle r_2, r_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 a_1^1 + a_1^2 a_1^2 & a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2 \\ a_2^1 a_1^1 + a_2^2 a_1^2 & a_2^1 a_2^1 + a_2^2 a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= AA^T \quad (3)$$

$$\begin{aligned}(2) \Rightarrow \omega^1 \wedge \omega^2 &= (a_1^1 du^1 + a_2^1 du^2) \wedge (a_1^2 du^1 + a_2^2 du^2) \\ &= a_1^1 a_2^2\, du^1 \wedge du^2 + a_2^1 a_1^2\, du^2 \wedge du^1 \\ &= (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)\, du^1 \wedge du^2 \\ &= \det A\, du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

$$(3) \Rightarrow (\det A)^2 = EG - F^2 \quad \Bigg\} \Rightarrow \omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{EG-F^2}\, du^1 \wedge du^2.$$

这证明了 (i).

为证明 (ii), (iii), 回忆

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_1^2 \\ h_2^1 & h_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} h_1^1 & h_1^2 \\ h_2^1 & h_2^2 \end{pmatrix} \text{ 为 Weingarten}$$

变换在基 $\{e_1, e_2\}$ 下之矩阵. 类似地讨论给出

$$\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = \det B \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 = K\, \omega^1 \wedge \omega^2.$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \omega_2^3$$
$$= h_1^1 \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge (h_2^2 \omega^2) = (h_1^1 + h_2^2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 = 2H\, \omega^1 \wedge \omega^2. \square$$

曲面上微分形式之严格定义. (可验证如下严格定义与前述朴素讨论吻合).

~~定义~~. 正则曲面 M 上之一个 2-form η 是一个定义在所有有序切向量对 v, w 之集合上之实值函数且满足

(i) $\eta(v, w)$ 对 v, w 线性

(ii) $\eta(v, w) = -\eta(w, v)$

引理: 设 η 为 M 之一个 2-form, v, w 是两个(线性无关)切向量, 则

$$\eta(av+bw,\ cv+dw) = \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \eta(v, w)$$

这引理说明, 2-form η 在所有有序切向量对上之取值由它在一对线性无关切向量上之取值决定, 这是个很重要之观察.

定义 (外积). 设 ϕ, ψ 为 M 上 1-form. 则其外积 $\phi \wedge \psi$ 为 M 上一个 2-form 满足

$$(\phi \wedge \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w) - \phi(w)\psi(v).$$

$\forall\ v, w \in T_pM,\ \forall p.$

易验证上面定义的 $\phi \wedge \psi$ 确为 2-form

定义 (外微分) 设 ϕ 为 M 上 1-form. 则其外微分 $d\phi$ 是 M 上 2-form 满足

$$d\phi(r_u, r_v) = \frac{\partial}{\partial u}\phi(r_v) - \frac{\partial}{\partial v}\phi(r_u)$$

注记: 需验证上述定义不依赖于参数选取

定理 设 f 为 M 上 0-forms, 则有 $d(df) = 0$.