

$$\begin{cases} dw^i = w^j \wedge w_j^i, & i=1,2,3 \quad (\diamond) \\ dw^i = w_j^i \wedge w^j, & i,j=1,2,3 \quad (0) \end{cases}$$

补 188'

回到曲面的讨论. 我们取曲面的正交活动标架

$$\{r; e_1, e_2, e_3\}$$

其中 e_3 为曲面法向量. 我们通过对把 $e_1(p), e_2(p), e_3(p)$ 沿 p 点的法线在 p 点附近移动, 可把 M 上的正交活动标架场延拓为 \mathbb{R}^3 的一个开集上的正交活动标架场. 这样我们就有相应的对偶 1-forms, w^1, w^2, w^3 和 $w_i^j, i,j=1,2,3$.

现在我们把运动方程 \diamond 只应用于 M 的切向量. 这样的话, $w^i, i=1,2$ 和 $w_i^j, i,j=1,2,3$ 均变为 M 上的 1-form.

在这样的观点下, 我们看到 w^3 作为 e_3 的对偶 1-form, 作用于 M 的切向量上始终为 0. 故有

$$\begin{cases} dr = w^\alpha e_\alpha \\ de_i = w_j^i e_j \end{cases}$$

$$dw^1 = w^j \wedge w_j^1 = w^2 \wedge w_2^1$$

$$dw^2 = w^j \wedge w_j^2 = w^1 \wedge w_1^2$$

$$0 = dw^3 = w^j \wedge w_j^3 = w^1 \wedge w_1^3 + w^2 \wedge w_2^3$$

这就是方程 ① ② ③ on page (181).