§8) 1-forms.

设 f 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个实值函数，我们会形式地记它的微分 (differential) 为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

为了课程后续的需要，我们必须将上面的形式记号严格化，即介绍 1-form 的概念。

回忆 $\mathbb{R}^3$ 中的向量有长度和方向，我们不区分它的起点。同时我们也可以考虑：

定义1. $\mathbb{R}^3$ 的一个切向量 v_p ~~是起点在 p 点处的向量 v~~

包含两个组成部分：向量 v 和起点 p.

两个切向量 $v_p = w_q$ 当且仅当 $v=w$ 且 $p=q$.

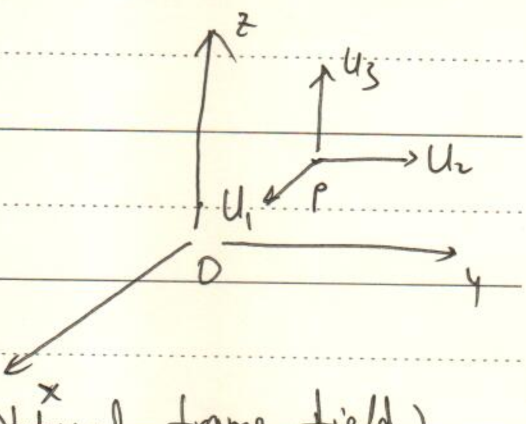
定义2. 设 p 为 $\mathbb{R}^3$ 中一点。所有起点为 p 的切向量的集合 $T_p(\mathbb{R}^3)$ 称为 $\mathbb{R}^3$ 在 p 点的切空间 (tangent space).

借用向量的加法和数乘，我们可以把 $T_p(\mathbb{R}^3)$ 变成一个向量空间，且易见作为向量空间 $\mathbb{R}^3$ 和 $T_p(\mathbb{R}^3)$ 同构.

定义3. $\mathbb{R}^3$ 的一个向量场 (vector field) 是一个将每点 $p\in\mathbb{R}^3$ 赋一个切向量 $V(p)\in T_p(\mathbb{R}^3)$ 的函数.

例子：

$$U_1(p) = (1,0,0)_p$$
$$U_2(p) = (0,1,0)_p$$
$$U_3(p) = (0,0,1)_p$$



为 $\mathbb{R}^3$ 的三个向量场.

$\{U_1, U_2, U_3\}$ 称为 $\mathbb{R}^3$ 的自然标架场 (Natural frame field).

性质：设 V 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个向量场，则存在三个唯一确定的实函数 x^1, x^2, x^3 使得 $V = x^1U_1 + x^2U_2 + x^3U_3$.

<u>定义4</u>：$\mathbb{R}^3$ 的一个 1-form ϕ 是 $\mathbb{R}^3$ 的所有切向量集合上的一个实值函数，使得对任意 $a, b \in \mathbb{R}$，和任意 $p \in \mathbb{R}^3$，$v, w \in T_p(\mathbb{R}^3)$，

$$\phi(av+bw) = a\phi(v) + b\phi(w).$$

~~即 ϕ 在每点处是线性的~~。

注记：对每个给定点 $p \in \mathbb{R}^3$，限制 ϕ 得函数

$$\phi_p : T_p(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R} \quad \text{是线性的}.$$

所有在每点 p 处，ϕ_p 是 $T_p(\mathbb{R}^3)$ 的对偶空间中的一个元素。以这个意义上讲，1-form 是对偶于向量场的！

1-form 的运算：给定 1-forms ϕ 和 ψ，$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

和：$(\phi+\psi)(v) := \phi(v) + \psi(v)$，对任一切向量 v

$f\phi$：$(f\phi)(v_p) := f(p)\,\phi(v_p)$ 对任一切向量 v_p.

给定 1-form ϕ 和向量场 V，我们有实值函数 $\phi(V): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 定义如下：在每一点 $p \in \mathbb{R}^3$ $\quad \phi(V)(p) := \phi_p(V(p))$.

如果对任一光滑向量场 V，$\phi(V)$ 均为光滑函数，我们则称 ϕ 为光滑的 1-form.

性质：对任意 1-forms ϕ, ψ，向量场 V, W，函数 $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，我们有：

(i) $\phi(fV+gW) = f\phi(V) + g\,\phi(W)$

(ii) $(f\phi + g\psi)(V) = f\phi(V) + g\psi(W)$.

运用上述框架，我们可以把 f 的微分 df 严格定义为一个 1-form.

<u>定义5</u>. 设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为一光滑函数，则 f 的微分 df 定义为如下定义的 1-form：

$$df(v_p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tv_p)$$

$\forall$ tangent vector v_p.

可以验证上述 df 确为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 1-form.

例子：记 x^1, x^2, x^3 为 $\mathbb{R}^3$ 的三个坐标函数，则 dx^1, dx^2, dx^3 为 $\mathbb{R}^3$ 的三个 1-form.

对 $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$，$v_p = \sum_{i=1}^{3} v^i U_i(p)$

我们有 $$dx^i(v_p) = \sum_{j=1}^{3} v^j \underbrace{dx^i(U_j(p))}_{\delta^i_j} = v^i.$$

性质：设 ϕ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 1-form，则 ϕ 可表为
$$\phi = \sum f_i dx^i, \quad 其中\ f_i = \phi(U_i).$$
这里 f_1, f_2, f_3 称为 ϕ 的欧氏坐标函数.

证明：由定义 ϕ，$\sum f_i dx^i$ 均为 1-form，它们相等当且仅当在每个切向量 $v_p = \sum_{i=1}^{3} v^i U_i(p)$ 上的取值相同.

注意到 $$(\sum f_i dx^i)(v_p) = \sum_{i=1}^{3} f_i(p)\, dx^i(v_p) = \sum_{i=1}^{3} f_i(p)\, v^i$$

而 $$\phi(v_p) = \phi\Big(\sum_{i=1}^{3} v^i U_i(p)\Big) = \sum_{i=1}^{3} v^i \underbrace{\phi(U_i(p))}_{= f_i(p)}$$

命题得证 □

至此我们看到，严格定义的 df 具有表达式
$$(*) \quad df = df(U_1)dx^1 + df(U_2)dx^2 + df(U_3)dx^3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$
即我们在本节开始提到的形式表达式.

作业：应用 $(*)$ 证明：对任意 $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，有

(i) $d(f+g) = df + dg$

(ii) $d(fg) = g\,df + f\,dg$

(iii) $d(h(f)) = h'(f)\,df$.

回忆，给定 $f: R^3 \to R$，我们有梯度、散度、旋度的概念。

梯度 (gradient)　grad$f$ 是 R^3 上的一个向量场

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} u_i$$

比较 $df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ 可见，df 和 grad$f$ "对偶"。

对 R^3 上任一向量场 $F := \sum_{i=1}^{3} f^i u_i$，其散度 (divergence) 定义为

$$\mathrm{div} F := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f^i}{\partial x^i}.$$

其旋度 (rotation)

$$\mathrm{rot}\, F := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right) u_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) u_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) u_3$$

(可形式地记为 $\mathrm{rot}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$).

作业. 验证 (i) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$

(ii) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0$.

实际上，rot F, div F ~~对应~~ 可以用外微分算子和微分 2-form 给出 ~~[illegible]~~ 类似于 $df \leftrightarrow \mathrm{grad} f$ 的解释。我们在后续的讨论中会涉及。