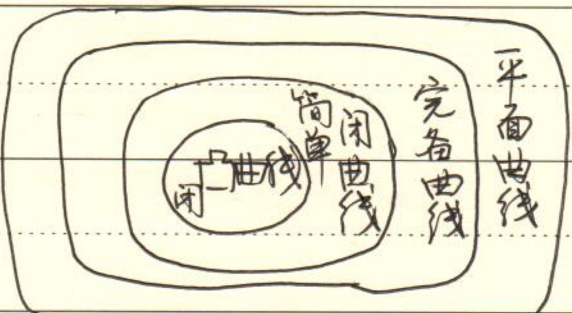
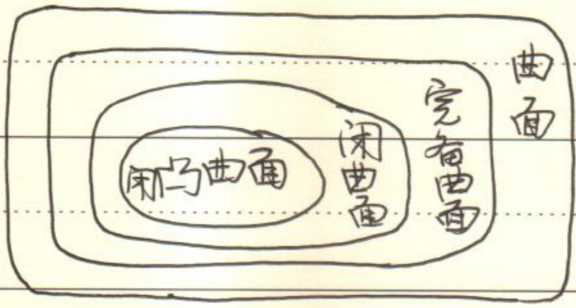
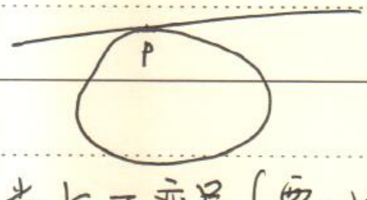
大范围微分几何简述





注记 (1) 凸性：一条简单闭平面曲线是凸的，如果它位于每点切线的同一侧



可以证明一条简单闭平面曲线是凸的当且仅当 K 不变号（要么 $k\geq 0$ 要么 $k\leq 0$）.
(See Kristopher Tapp. Prop 2.12)（沈一兵，整体微分几何初步，定理1.9）

E^3 中曲面称为凸曲面，如果它位于每点切平面的一侧.

Thm1 (Hadamard 1897) 设 M 是 E^3 中的紧致无边可定向曲面. 若高斯曲率 $K>0$，则它是凸曲面.

实际上，$K>0$ 处处成立的紧致无边曲面又称卵形面 (ovaloid)（严格凸）

Thm2 (Chern-Lashof 1958) 设 M 是 E^3 中的紧致无边可定向曲面，若高斯曲率 $K\geq 0$，则它是凸曲面。

(2) 完备性：作为度量空间的完备性，即关于 d 的 Cauchy 列收敛.
对曲面而言，还有测地完备性：曲面 M 称作是测地完备的，如果任何测地线都可以无限延长.

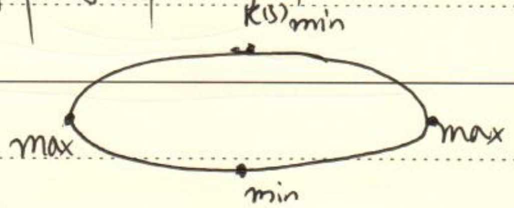
Thm (Hopf-Rinow 1931) 曲面的测地完备性和度量完备性等价。
完备曲面上任两点，都可由最短测地线联结.

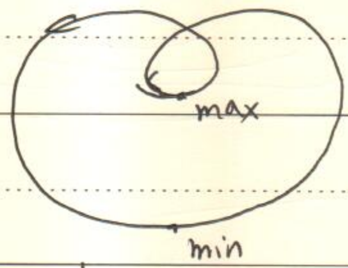
Thm3

(i)（四顶点定理）平面上简单闭凸曲线至少有四个顶点，即至少有四个点处 $\dot{k}(s)=0$.

(ii) E^3 中紧致无边曲面 M 上必有一点 $p_0\in M$ 满足其高斯曲率 $K(p_0)>0$.

注：平面曲线的顶点即为函数 $s\mapsto k(s)$ 的局部极大或极小值.
"简单"条件不可去：





"凸"可去，但证明更困难 (S. B. Jackson, Bull. AMS, 1944)。□

Thm 4 (绝对全曲率)

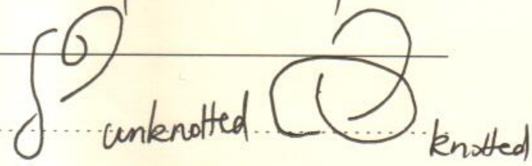
(i) (W. Fenchel 1929) 对任一空间简单闭曲线 C，k 是其曲率函数，则

$$\int_C k\,ds \geq 2\pi.$$

等号取到当且仅当 C 为平面简单闭凸曲线.

(ii) (I. Fary (1949) 和 J. Milnor (1950) 各自独立) 对任一空间"打结"(knotted) 简单闭曲线 C，k 是其曲率函数，则

$$\int_C k\,ds \geq 4\pi.$$



(iii) 对 E^3 中紧致无边可定向曲面 M，其亏格为 g，则

$$\int_M |K|\,dV \geq 4\pi(1+g).$$

Thm 5 (全平均曲率)

(i) (Willmore 1965) 对 E^3 中紧致无边可定向曲面 M 有

$$\int_M H^2\,dV \geq 4\pi.$$

且 "=" 成立当且仅当 M 为标准球面.

(ii) (Willmore Conj. 1971, Marques-Neves 2014)

对 E^3 中任意嵌入环面 T^2，有 $\int_{T^2} H^2 dV \geq 2\pi^2$.

Thm 6 (常高斯曲率完备曲面)

(i) E^3 中 Gauss 曲率为常数的紧致无边曲面是标准球面.
(H. Liebmann 1899)

(ii). E^3 中 Gauss 曲率恒为 0 的完备曲面为平面或广义柱面 (P. Hartman & L. Nirenberg 1959). ~~P. Hartman & L. Nirenberg~~

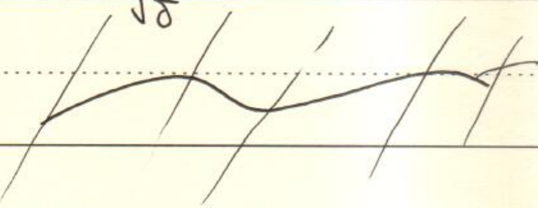
(iii) E^3 中不存在常负 Gauss 曲率的完备曲面
(D. Hilbert 1901)

注记 (i) 实际上，E^3 中~~亚~~常正 Gauss 曲率的完备曲面为标准球面.

Thm (Bonnet 1850, Reformulated by Hopf-Rinow 1931) E^3 中完备曲面 M 若有 $K \geq \delta > 0$，则 M 紧致无边，且

$$\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

(ii) 广义柱面也包括



不一定为闭曲线

(iii) 如不要求"常"，即~~只~~只问 E^3 中负 Gauss 曲率完备曲面是存在的，如 Catenoid. 但是：

Thm (Efimov 1954) (Conjecture of Cohn-Vossen).

E^3 中不存在 Gauss 曲率 $\leq \delta < 0$ 的完备曲面.

另外注意，伪球面具常负曲率但不光滑.

(iv) Thm 6 中所有结论在不要求完备性时均不对.

Thm 7 (Hadamard) (i) 单连通完备曲面 M 若有 $K \leq 0$，则对任一 $p \in M$，$\exp_p : T_pM \to M$ 是微分同胚，即 M 微分同胚于平面.

(ii) 卵形面 M（即紧致无边 $K>0$）的高斯映射 $M \longrightarrow S^2$ 是一个微分同胚，即 M 微分同胚于球面.

(iii) (J.J. Stoker 1936) 满足 $K>0$ 的完备曲面 同胚于一个球面或平面.

注记 (ii) 中条件 $K>0$ 可弱化为 $K\geq 0$ (Chern-Lashof 1958)

• 关于常平均曲率曲面的 Hopf 猜想：

E^3 中紧致无边可定向曲面 M 若有常平均曲率，则 M 为标准球面.

反例：H.C. Wente 1984 常平均曲率环面

Thm 8 (i) E^3 中紧致无边可定向曲面 M 若亏格为0且有常平均曲率，则 M 为标准球面 (H. Hopf 1950)

(ii) E^3 中的嵌入(无自交点)紧致无边可定向曲面 M 若有常平均曲率，则 M 为标准球面 (A.D. Alexandrov 1956)

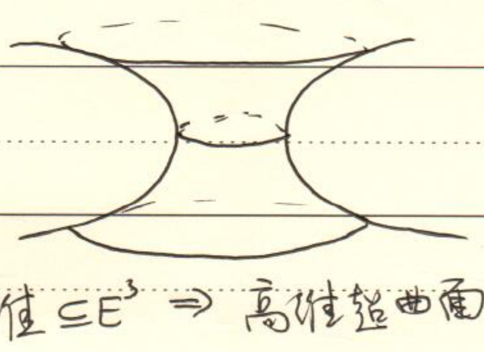
• 极小曲面，即 $H\equiv 0$ 的曲面

Thm 9 (i) E^3 中不存在紧致无边可定向的极小曲面 ($\Leftarrow$ Willmore)

(ii) E^3 中完备的极小图必是平面 (S. Bernstein 1915)

注：曲面 $r=r(x,y)=(x,y,f(x,y))$ 是函数 f 的图.

例 Catenoid 是旋转极小曲面



2维 $\subseteq E^3$ $\Rightarrow$ 高维超曲面 $\Rightarrow$ 抽象流形和子流形