微分形式的积分 [ONeill §4.6]　的积分定义为相应形式在相应区域上的积分.

我们也可讨论曲面上区域或曲线上微分形式的积分.

定义1. 设 ϕ 是 M 上 1-form，设 $c: [a,b] \to M$ 是 M 上曲线. 则 ϕ 沿 c 的积分定义为

$$\int_c \phi := \int_{[a,b]} \alpha^* \phi = \int_a^b \phi(\alpha'(t))\, dt.$$

这里 $\alpha^*\phi$ 是 1-form ϕ 的"拉回"，是 R^2 上的 1-形式. 限制在 $[a,b]$ 上，

有 $$\alpha^*\phi\left(\frac{d}{dt}\right) := \phi\left(\underset{\text{切映射}}{\alpha_*}\frac{d}{dt}\right) = \phi(\alpha'(t))$$

故而限制在 $[a,b]$ 上有 $\alpha^*\phi = \phi(\alpha'(t))\,dt$.

因此，微积分基本定理可表为

定理1. 设 f 是 M 上光滑函数. 设 $c: [a,b] \to M$ 是 M 上曲线 满足 $c(a) = p$，$c(b) = q$. 则有：

$$\int_c df = f(q) - f(p).$$

定义2. 设 η 是 M 上 2-form，设 $r: R \to M$ 是 M 上区域 （R 为矩形区域 $[a,b] \times [c,d]$）则 η 沿 r 的积分定义为

$$\iint_r \eta := \iint_R r^*(\eta) = \int_a^b \int_c^d \eta(r_u, r_v)\, du \wedge dv$$

这里 $r^*(\eta)$ 为 R 上二形式，故必可写成 $h\, du \wedge dv$ 的形式.

又由 ~~*~~ 因为 $\phi \wedge \psi(v,w) = \phi(v)\psi(w) - \phi(w)\psi(v)$

知 $du \wedge dv\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = du \wedge dv\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0$

$$r^*(\eta)\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) := \eta\left(r_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), r_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right) = \eta(r_u, r_v)$$

$$\Rightarrow r^*(\eta) = \eta(r_u, r_v)\, du \wedge dv.$$

定理2. (Stokes' theorem) $\iint_r d\phi = \int_{\partial r} \phi.$

回忆，我们在局部 Gauss-Bonnet 公式的证明中，实际上使用了如下关键的积分公式：

设 □ 可包含在以其内某点为心的测地极坐标邻域之中，即有欧氏区域 $D\subset\mathbb{R}^2$，s.t. $r: D\to$ □ 为测地极坐标映射

则有

$$\iint_{\Box} K\,dV = \iint_D K(\rho,\theta)\,|r_\rho\wedge r_\theta|\,d\rho\,d\theta$$

$$= \iint_D -(\sqrt{G})_{\rho\rho}\,d\rho\,d\theta$$

(**)
$$= \oint_{\partial D} (-\sqrt{G})_\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^l (-\sqrt{G})_\rho \frac{d\theta}{ds}\,ds$$

$$= \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{ds} - k_g\right) ds.$$

这里 $\varphi(s)$ 为 □ 的边界切向量与 $\frac{r_\rho}{|r_\rho|}$ 的夹角。

然后，我们通过"拼接"，可证明该积分公式在大范围也成立。

在一片正则曲面片 $r=r(u,v)$ 上，我们可以把上述过程直接用微分形式的积分来重新描述。建立正交活动标架

$$e_1 = \frac{r_u}{|r_u|},\quad e_3 = \frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|},\quad e_2 = e_3\wedge e_1$$

则有高斯曲率 $K = -\frac{d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$ 即 $K\omega^1\wedge\omega^2 = -d\omega_1^2$.

则 Stokes 公式的一个特殊形式为

(*)
$$\iint_{\Box} K\omega^1\wedge\omega^2 = -\iint_{\Box} d\omega_1^2 = -\oint_{\partial\Box} \omega_1^2.$$

我们在这里不去一般地证明微分形式版本的 Stokes 公式（见补 246）

~~取而代之的，我们验证~~ ④

~~同样地，由"拼接"技术，我们只须验证~~

我们根据微分形式积分的定义，分别来看等式④的两边。

先看右边：

$$\oint_{\partial\square} \omega_1^2 := \int_0^l \omega_1^2(\dot{r}(s))\,ds$$

$r=r(s)$

有新正交标架 $\bar{e}_1 = \dot{r}(s)$, $\bar{e}_3 = e_3$, $\bar{e}_2 = e_3 \wedge \bar{e}_1$.

则有 $\overline{\omega_1^2} = \omega_1^2 + d\varphi$，$\varphi$ 为 $\bar{e}_1 = \dot{r}(s)$ 与 e_1 的夹角。

故而 $$\oint_{\partial\square} \omega_1^2 := \int_0^l \omega_1^2(\dot{r}(s))\,ds = \int_0^l \left(\overline{\omega_1^2} - d\varphi\right)(\dot{r}(s))\,ds$$

$$= \int_0^l \left(k_g - \frac{d\varphi}{ds}\right) ds$$

也就是说

$$-\oint_{\partial\square} \omega_1^2 = \int_0^l \left(\frac{d\varphi}{ds} - k_g\right) ds$$

来看左边：

$$\iint_D K\,\omega^1\wedge\omega^2 = \iint_D K(u,v)\,\omega^1\wedge\omega^2(r_u, r_v)\,du\wedge dv$$

$$= \iint_D K(u,v)\Big[\underbrace{\omega^1(r_u)}_{|r_u|}\underbrace{\omega^2(r_v)}_{|r_v|\sin\theta} - \underbrace{\omega^2(r_u)}_{0}\,\omega^1(r_v)\Big]\,du\wedge dv$$

$$= \iint_D K(u,v)\,|r_u||r_v|\sin\theta\,du\wedge dv$$

$$= \iint_D K(u,v)\,|r_u\wedge r_v|\,du\wedge dv.$$

因此，由前述讨论 ④④，④在一个充分地小坐标邻域内成立。由"拼接"技术，可验证 ④ 在任意曲面片上成立！

曲面上向量沿闭曲线平移所产生的角差计算

在球面上~~沿纬线圈平行移动的向量的角差~~将纬线圈上某一点处的纬线切向量 V 平行移动回到该点的角差我们前面计算过为 $2\pi\sin\psi$，ψ 为纬度，下面我们给出一般公式：

命题 7.1 设 C 为曲面 M 上光滑的简单闭曲线，所围区域 $\square$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中单连通的开集。设 C 参数表示为 $r=r(s)$，s 为弧长参数。（参数方向由 $\square$ 上定向诱导）

设 $V(s)$，$s\in[0,L(C)]$ 为沿 C 平行的切向量场，~~$\beta(s)$，$s\in[0,L(C)]$ 为~~ 设 $\{r;e_1,e_2,e_3=n\}$ 为 M 的一个正交活动标架，$\beta(s)$，$s\in[0,L(C)]$ 为 $e_1(s)$ 到 $V(s)$ 的有向角，即 β 为角度函数。则有：

$$\beta(L(C))-\beta(0)=\iint_{\square}K\,dV$$

证明：Claim. V 沿 C 平行 $\Rightarrow$ 沿 C 有 $d\beta+\omega_1^2=0$.

V 沿 C 平行 $\Rightarrow$

$$0=\frac{DV}{ds}=\frac{D}{ds}\left(\cos\beta(s)e_1(s)+\sin\beta(s)e_2(s)\right)$$

$$=\frac{d\beta}{ds}\left(-\sin\beta(s)e_1(s)+\cos\beta(s)e_2(s)\right)$$

$$+\cos\beta(s)\,\omega_1^2(\dot r(s))e_2(s)-\sin\beta(s)\,\omega_1^2(\dot r(s))e_1(s)$$

$$=\left(\frac{d\beta}{ds}+\omega_1^2(\dot r(s))\right)\left(-\sin\beta e_1+\cos\beta e_2\right)$$

与向量 $(-\sin\beta e_1+\cos\beta e_2)$ 做内积，得 $0=\frac{d\beta}{ds}+\omega_1^2(\dot r(s))$. $\square$

故而有

$$\iint_{\square}K\,dV=\iint_{\square}K\,\omega^1\wedge\omega^2=\iint_{\square}-d\omega_1^2=-\oint_C\omega_1^2=\oint_C d\beta$$

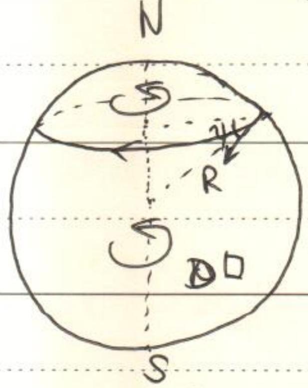
$$=\beta(L(C))-\beta(0).$$

$\square$

注记：回忆福柯摆的解释。

可设 V 为纬线圈 C 一点处的切向量，

沿如右所示的方向沿 C 平行移动



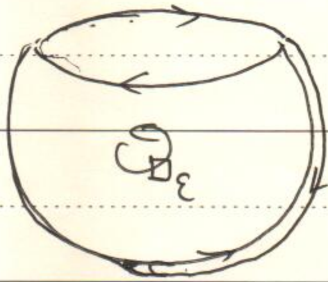
注意：有此定向的 C 是下半球冠

区域上定向诱导的，记下球冠为 $\square$，则 $C=\partial\square$.

考虑 $\square$ 上极坐标 $r=r(\rho,\theta)$，的参数化在 $\square\setminus\{S\}$ 上正则。

在 $\square_\varepsilon$ 上，取 $e_1=\frac{r_\rho}{|r_\rho|}$，$e_2=\frac{r_\theta}{|r_\theta|}$.

得有 $$\iint_{\square} K\,dV = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\square_\varepsilon} K\,dV$$



$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\square_\varepsilon} K\,\omega^1\wedge\omega^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} -\iint_{\square_\varepsilon} d\omega_1^2 = \lim_{\varepsilon\to 0} -\oint_{\partial\square_\varepsilon}\omega_1^2$$

$$= 2\pi + \oint_C d\varphi = 2\pi + \varphi(L(C)) - \varphi(0)$$

同时，$$\iint_{\square} K\,dV = \frac{1}{R^2}\cdot 2\pi R\cdot h = \frac{1}{R^2}\,2\pi R(R+R\sin\psi)$$

$$= 2\pi(1+\sin\psi).$$

故而有 $\varphi(L(C)) - \varphi(0) = 2\pi\sin\psi$. □

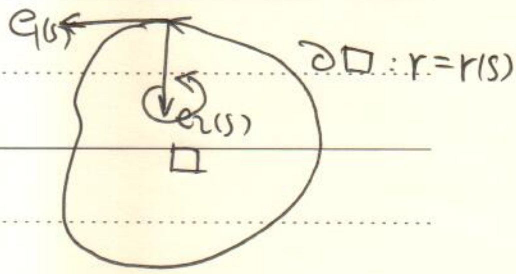
下面再来看一个 Gauss-Bonnet 公式的应用. 回忆

$$\iint_{\Omega} K\,dV + \oint_{\partial\Omega} k_g\,ds + \sum_i (\pi - \angle A_i) = 2\pi.$$

考虑特别情形, Ω 是一欧氏平面区域, $\partial\Omega$ 是一条光滑的简单闭曲线, 则有 $\iint_{\Omega} K\,dV = 0$ since $K\equiv 0$, $\sum_i (\pi-\angle A_i) = 0$ since 光滑.

也即:

$$\oint_{\partial\Omega} k_g\,ds = 2\pi.$$



这是一个非常有意思的观察: 注意, Ω 我们采用如右所示有向面积元。则 $\partial\Omega$ 具有逆时针定向。若用正交标架 $e_1 := \dot r(s)$, $e_3 = n$, $e_2 = n\wedge e_1$

则有 $k_g = \langle \frac{de_1}{ds}, e_2\rangle = \langle \ddot r(s), e_2(s)\rangle = k(s)$

即是平面曲线 $\partial\Omega$ 在给定右示平面上定向下的<u>带符号曲率</u>!!

Gauss-Bonnet 公式告诉我们

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\Omega} k(s)\,ds = 1, \quad \text{其中 } \partial\Omega \text{ 为逆时针定向.}$$

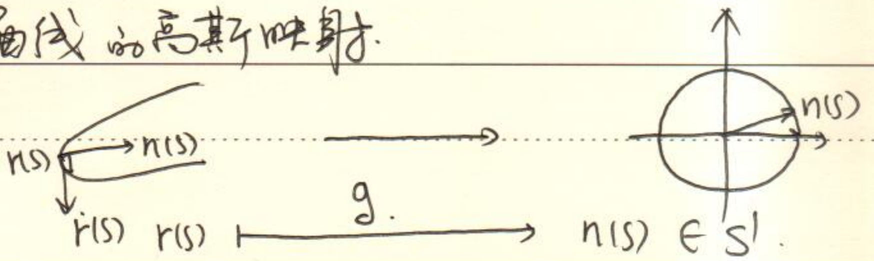
当然, 如果上述积分沿顺时针方向, 我们就有 $\frac{1}{2\pi}\oint_{-\partial\Omega} k(s)\,ds = -1.$

一般地, 考虑平面光滑闭曲线 $r: [0,l] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $s \longmapsto r(s)$ $\left(\begin{array}{l} r(0)=r(l) \\ \dot r(0)=\dot r(l) \\ \vdots \end{array}\right)$.

设 $k(s)$ 为其带符号曲率.

<u>定义</u> (旋转指数). 我们称 $i = \frac{1}{2\pi}\int_0^l k(s)\,ds$ 为闭曲线 $r=r(s)$ 的旋转指数.

回忆平面曲线的高斯映射.



$r(s) \overset{g}{\longmapsto} n(s) \in S^1.$

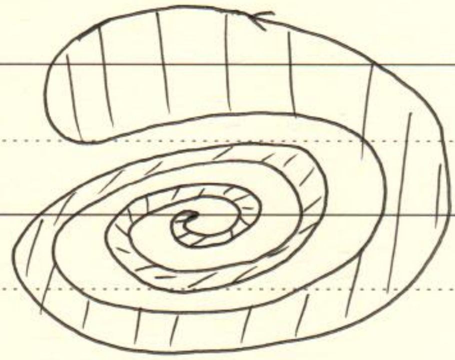
易见，$k(s)$ 即为曲线上点 $r(s)$ 在高斯映射下像 $n(s)$ 的在 S^1 上的移动速度。$k>0$ 时，~~$e(s)=r(s)$ 逆时针~~ $n(s)$ 逆时针转动，$k<0$ 时，$n(s)$ 顺时针转动。

定理（旋转指数定理）：设 C 为 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑简单闭曲线，则 C 的旋转指数为 ± 1，即

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C k(s)\,ds = \pm 1$$

证明：Gauss-Bonnet 公式。 □

注意上述定理并不显然：



大家还要注意到，上述结果与本课程前述讨论的局部几何结果的很大不同：我们这里关心的是"整个"曲率函数。如果考虑变化的值

$$t \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^t k(s)\,ds$$

当 t 从 0 变到 l 时，该值可能为正，可能为负，可能很大，但最终 $t=l$ 时，值只有可能是 $+1$ 或 -1 !! 这是一条平面闭曲线的"整体"性质，是"Differential geometry in the large"的一个例子！

接着的一个自然问题是：在一个"闭"曲面上，高斯曲率积分（total curvature）是什么呢？