

作业19. 考查如下三个正则曲面(片)

(i) 正螺面  $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto r(u, v) := (v \cos u, v \sin u, u)$$

(ii) 旋转面  $r_1: D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto r_1(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \log u)$$

这里  $D := \{(u, v) \mid u \in (-\infty, \infty), v \in (0, 2\pi)\} \subset \mathbb{R}^2$ .

(iii) 悬链面  $r_2: D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto r_2(u, v) = (\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \sin v, \operatorname{arcsinh} u)$$

(1) 分别求其第一、第二基本形式。

(2) 分别求其逐点处的主曲率、高斯曲率、平均曲率。

(3) 定义映射: 对  $i=1, 2$ ,

$$F_i: r(D) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow r_i(D) \subset \mathbb{R}^3$$

$$r(u, v) \mapsto F_i(r(u, v)) := r_i(v, u)$$

(3a) 证明: 对  $\forall i=1, 2$ , 曲面  $r(D)$  在任一点  $p \in r(D)$  的高斯曲率 ~~等于~~ 等于曲面  $r_i(D)$  在点  $F_i(p) \in r_i(D)$  处的高斯曲率, 即  $F_i$  保持相应点处的高斯曲率不变。

(3b) ~~注意~~ 对任意  $(u_0, v_0) \in D$ , 考查两条坐标曲线

$$l_1: u \mapsto r(u, v_0), \quad u \in (-\infty, \infty)$$

$$l_2: v \mapsto r(u_0, v), \quad v \in (0, 2\pi)$$

试判断  $\left. \frac{d}{du} \right|_{u=u_0} F_i(l_1(u))$  与  $r_u(u_0, v_0)$  长度是否相等?

$\left. \frac{d}{dv} \right|_{v=v_0} F_i(l_2(v))$  与  $r_v(u_0, v_0)$  长度是否相等?

$\left\langle \left. \frac{d}{du} \right|_{u=u_0} F_i(l_1(u)), \left. \frac{d}{dv} \right|_{v=v_0} F_i(l_2(v)) \right\rangle$  与  $\langle r_u(u_0, v_0), r_v(u_0, v_0) \rangle$  是否相等?