作业21（指标计算）

定义 $R_{\delta\alpha\beta\gamma} := -g_{\delta\xi}\left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\xi}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\gamma}^{\xi} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\beta}^{\xi}\right)$

〈1〉证明：

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}\partial u^{\delta}} + \frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}\partial u^{\delta}}\right)$$

$$+\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta}\Gamma_{\eta\delta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta}\Gamma_{\eta\delta\beta},$$

其中 $\Gamma_{\eta\delta\gamma} = g_{\eta\xi}\Gamma_{\delta\gamma}^{\xi}$ 为第一类 Christoffel 符号

〈2〉. 计算所有 Christoffel 符号 $\{\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha},\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2\}$ 用 E, F, G 的表达式。（比如 $\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}E_u + \frac{F}{2}E_v - FF_u\right)$）

〈3〉 应用〈1〉和〈2〉证明：

$$\begin{aligned} 4(EG-F^2)R_{1212} = {} & E\left(E_v G_v - 2F_u G_v + (G_u)^2\right) \\ & + F\left(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u\right) \\ & + G\left(E_u G_u - 2E_u F_v + (E_v)^2\right) \\ & - 2(EG-F^2)\left(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}\right) \end{aligned}$$

（与高斯绝妙定理比较，回忆 Gauss 方程告诉我们 $R_{1212} = K(EG-F^2)$）

〈4〉. 设 $r: D \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto r(u,v)$ 为一正则曲面片且其参数化满足 $F = M = 0$. 应用〈2〉证明 Codazzi 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \dfrac{\partial b_{12}}{\partial u^1} = \Gamma_{12}^{\xi} b_{\xi 1} - \Gamma_{11}^{\xi} b_{\xi 2} \\ \dfrac{\partial b_{21}}{\partial u^2} - \dfrac{\partial b_{22}}{\partial u^1} = \Gamma_{22}^{\xi} b_{\xi 1} - \Gamma_{21}^{\xi} b_{\xi 2} \end{cases}$$

用记号 E, F, G, L, M, N 可表为 $L_v = HE_v$, $N_u = HG_u$, H 为平均曲率。