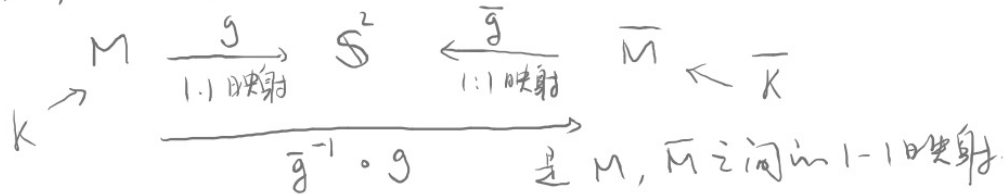


微分几何(H)

2022/12/27 09:36-13:36

微分几何(H) 第三十讲

卵形面 M, \bar{M}



若 $\bar{g}^{-1} \circ g$ 等距, 那么保持高斯曲率

$$K(p) = \bar{K}(\bar{g}^{-1} \circ g(p))$$

$$\rightarrow K \circ g^{-1} = \bar{K} \circ \bar{g}^{-1} \quad \text{作为 } S^2 \text{ 上的函数.}$$

反之, 若 $K \circ g^{-1} = \bar{K} \circ \bar{g}^{-1}$ 则有 $\bar{g}^{-1} \circ g$ 是一个^{单位}平移

Minkowski 问题: 一个卵形面是否可由其高斯曲率 (作为^{单位}法向量的迹) (唯一) 确定?

给定 S^2 上 一个正值函数 K , 问是否存在卵形面 M s.t. 其高斯曲率 $K = K \circ g$

实际上, 对卵形面而言, 其支撑函数 $g := \langle r, n \rangle$ 可以确定卵形面

$$\textcircled{r} \leftarrow \textcircled{g} \quad (\text{待证})$$

关于完全非线性 PDE 问题 归化为 g 满足一个 Monge-Ampère ^型 方程 解的存在性问题

Nirenberg CPAM (1953) Pogorelov (1952)

Hilbert 定理

Liebmann (1899) E^3 中 一族常 Gauss 曲率曲面 必为球面

E^3 中 一族曲面

- $K \equiv c > 0$ 球面
- $K \equiv 0$ 不存在
- $K \equiv -c, c > 0$ 不存在

\rightarrow 凸曲面

$K \equiv c$

存在 球面 (广义)

^{Bonnet} 完备曲面, $K \geq \delta > 0$
 $\Rightarrow \text{diam} \leq C(K)$

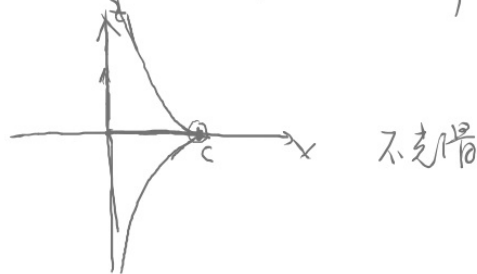
E^3 中定常曲面 $\left\{ \begin{array}{l} K \equiv c \text{ 存在 (球面) (广义)} \\ K \equiv 0 \text{ 存在 (平面) (柱面)} \\ K \equiv -c, c > 0 \text{ 存在?} \end{array} \right.$

定理 (Hilbert, 1901) 在 E^3 中不存在常负高斯曲率的定常光滑曲面.

Trans. AMS

伪球面.

曳物线



E. Holmgren 1902. C.R. Acad. Sci. Paris. Alternative prove 740-741

用曲面的主曲率 $k_1, k_2, k_1 \geq k_2$

$$\begin{cases} f(p) = \langle r(p) - r(p_0), n(p) \rangle \\ g(p) = -\langle r(p), n(p) \rangle \end{cases}$$

渐近方向 夹角 α

① 定常曲面 (度量定常)

$$\forall p, q \in M, \quad d(p, q) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

连接 p, q 两点之分段光滑曲线

引理: E^3 中光滑 (连通) 曲面 M 上任两点都可由曲面上之分段光滑曲线相连.

证明 $\forall p \in M,$

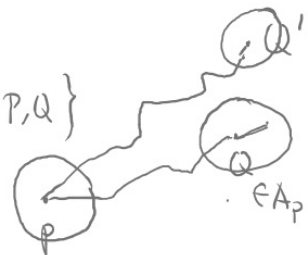
$$A_p = \{ Q \in M \mid \text{存在分段光滑曲线连接 } p, Q \}$$

A_p 开集

$$A_p \text{ 闭集} \Leftarrow M \setminus A_p = \{ Q \in M \mid \text{不存在} \dots \dots \dots \}$$

$A_p \neq \emptyset$

$$\xrightarrow{\text{连通}} A_p = M.$$



$$d(p, q) < \infty$$

引理 (M, d) 是一个度量空间, 也就是:

$$(i) \quad d(p, q) = d(q, p) \quad \forall p, q \in M$$



证明 (i), (ii), (iii) ...



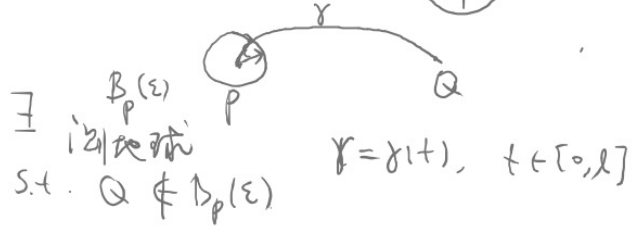
- (i) $d(P, Q) = d(Q, P), \forall P, Q \in M$
- (ii) $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R), \forall P, Q, R \in M$
- (iii) $d(P, Q) \geq 0$, 且 $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

证明 $P = Q \Rightarrow d(P, Q) = 0$
 关键 $d(P, Q) = 0 \Rightarrow P = Q$

~~证明~~ 且说若 $P \neq Q$, 则 $d(P, Q) > 0$



Hausdorff 可分性



$$l(\gamma) \geq \underline{l}(\gamma|_{[0, t_0]}) \geq \epsilon > 0$$

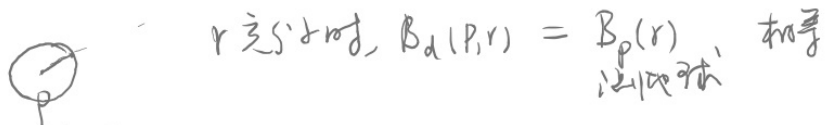
$$\Rightarrow d(P, Q) \geq \epsilon > 0$$

定义: E^3 中的光滑曲面 M 称为完备的, 若 (M, d) 作为度量空间是完备的. 也就是说, 关于 d 的任一 Cauchy 列收敛.

$\{P_n\}$ $d(P_n, P_m)$ 收敛到 0:35.

E^3 中光滑曲面 M 的 拓扑 \leftrightarrow 子空间拓扑 \leftrightarrow 本身拓扑

d 定义的拓扑. 拓扑 是 $B_d(P, r) = \{Q \in M : d(P, Q) < r\}$



与曲面本身拓扑一致.

命题: 如果曲面 M 作为 E^3 中的子集是闭集, 则 M 是完备的.

证明: $\forall P, Q \in M$.

$$d_n(P, Q) \geq d_{E^3}(P, Q)$$

\Rightarrow 若 $\{P_n\}$ 是 M 上关于 d 的 Cauchy 列, 则它也是 E^3 中关于 d_{E^3} 的 Cauchy 列

$$\Rightarrow \exists P_0 \in E^3 \text{ s.t. } d_{E^3}(P_n, P_0) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow \exists P_0 \in E^3$ s.t. $d_{E^3}(P_n, P_0) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$
 因 M 闭集, $\Rightarrow \underline{P_0} \in M$.

需要 $d_M(P_n, P_0) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. \square

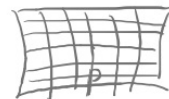
② $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ $L = \langle r_u, n_u \rangle$
 $E = \langle r_u, r_u \rangle$ CR.

$K \mapsto \frac{c^2}{c^4} \cdot K = \left(\frac{1}{c^2}\right) K$

不妨设 $K \equiv -1$.

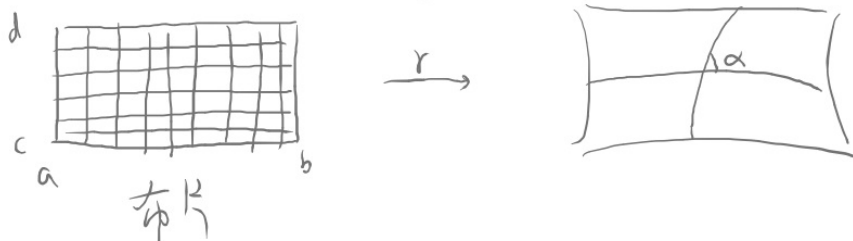
引理. 设 M 是 E^3 中 $K \equiv -1$ 的光滑曲面. 对任 $P \in M$, 存在曲面片

$r: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$
 $r(0,0) = P$



使得其坐标曲线均为 弧长参数 的渐近线

注: $r: (a,b) \times (c,d) \rightarrow M$, 若所有坐标曲线都是弧长参数,
 则称 r 是一个 Chebyshev 网.



引理中的 r 称为一个 渐近 Chebyshev 网.

引理之证明.

$K \equiv -1$ $P \in M$, $T_P M$ 上

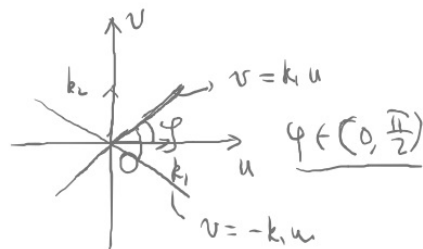
渐近方向 $k_1 u^2 + k_2 v^2 = 0$

$\Rightarrow v = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} u$ $k_1 k_2 = -1, k_1 \geq k_2$ ($k_1 > 0, k_2 < 0$)

$v = \pm \sqrt{k_1} u = \pm k_1 u$, $\tan \varphi = k_1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\cot \varphi$

$K \equiv -1 \Rightarrow$ 无脐点 $\forall P \in M$, \exists 曲线网

$r = r(u,v)$. r_u, r_v 互方向 分别对应 k_1, k_2 .



由 $r = r(u, v)$, r_u, r_v 为切向量, 且 $r_u \perp r_v$

$$r = r(u, v), \quad r_u, r_v \text{ 为切向量, 且 } r_u \perp r_v$$

$$\text{取 } e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}, \quad e_3 = e_1 \wedge e_2 \text{ 为法向量}$$

$$\Rightarrow \omega^1 = \sqrt{E} du, \quad \omega^2 = \sqrt{G} dv$$

$$\text{由结构方程 } \begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \end{cases} \Rightarrow \omega^3 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv$$

$$\text{另外 } \begin{pmatrix} \omega^3 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \omega^3 = k_1 \omega^1 = k_1 \sqrt{E} du \\ \omega^3 = k_2 \omega^2 = k_2 \sqrt{G} dv \end{cases}$$

$$\text{Codazzi 方程 } \begin{cases} d\omega^3 = \omega^2 \wedge \omega^3 = k_2 \omega^2 \wedge \omega^1 = -k_2 (\sqrt{E})_v du \wedge dv \\ d\omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^3 \end{cases}$$

$$\text{左端 } d\omega^3 = d(k_1 \omega^1) = dk_1 \wedge \omega^1 + k_1 d\omega^1 \\ = d(k_1 \sqrt{E} du) = (k_1 \sqrt{E})_v du \wedge dv$$

$$\Rightarrow -(k_1 \sqrt{E})_v = -k_2 (\sqrt{E})_v$$

$$\boxed{(k_1)_v \sqrt{E} + (k_1 - k_2) (\sqrt{E})_v = 0} \quad <1>$$

$$\text{类似地, } \boxed{(k_2)_u \sqrt{G} - (k_1 - k_2) (\sqrt{G})_u = 0} \quad <2>$$

$$\text{代入 } k_1 = \tan \varphi, \quad k_2 = -\cot \varphi$$

$$<1> \Rightarrow 0 = \frac{\varphi_v}{\cos^2 \varphi} \sqrt{E} + \frac{(\sqrt{E})_v}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi} \right)_v$$

$$<2> \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} \right)_u$$

$$\text{Codazzi 方程 } \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi} \right)_v = 0 \quad \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} \right)_u = 0$$

作参数变换 $(u, v) \mapsto (\xi, \eta)$ 使得

$$\begin{cases} d\xi = \left(\frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi} \right) du \\ d\eta = \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} \right) dv \end{cases}$$

$$\text{可解得 } \begin{cases} d^2 \xi = 0 \\ d^2 \eta = 0 \end{cases} \quad \left(\frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi} \right)_v du \wedge dv$$

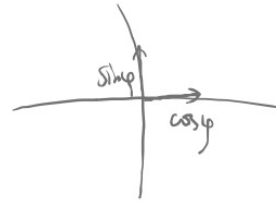
$$\frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi}(u, v) \quad \xi = \xi(u), \quad \eta = \eta(v)$$

$$\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}(u, \varphi) \quad \xi = \xi(u), \quad \eta = \eta(u)$$

$$\begin{cases} d\xi(r_u) = \frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}(u) \\ d\xi(r_v) = 0 \end{cases} \quad \text{若曲线没有变化, 还是曲线}$$

$$r = r(u, v) \Rightarrow r = r(\xi, \eta)$$

$$\begin{cases} \omega^1 = \sqrt{E} du = \cos\varphi d\xi \\ \omega^2 = \sqrt{G} dv = \sin\varphi d\eta \end{cases}$$

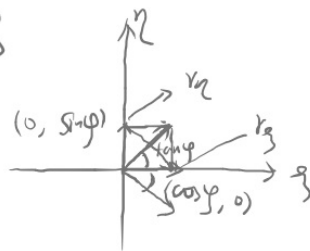


$$r_\xi = |r_\xi| e_1 \quad \omega^1(r_\xi) = |r_\xi| = \cos\varphi d\xi(r_\xi) = \cos\varphi$$

$$r_\eta = |r_\eta| e_2 \quad |r_\eta| = \omega^2(r_\eta) = \sin\varphi$$

$r_\xi + r_\eta$ 是该点处一个单位切近方向

$r_\xi - r_\eta$ 是另一个单位切近方向



再作参数变换 $\begin{cases} \xi = s+t \\ \eta = s-t \end{cases}$

$(\xi, \eta) \rightarrow (s, t)$ 使

$$r = r(\xi, \eta) = r(s, t)$$

$$r_s = r_\xi \frac{\partial \xi}{\partial s} + r_\eta \frac{\partial \eta}{\partial s} = r_\xi + r_\eta$$

$$r_t = r_\xi \frac{\partial \xi}{\partial t} + r_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} = r_\xi - r_\eta$$

$$\alpha = 2\varphi \in (0, \pi)$$

$$\alpha_{st} = \sin\alpha$$

Sine-Gordon 方程

□

下证