微分几何(H)

2022/12/29 07:42-11:42

微分几何(H)第三十三讲

Hilbert 1901. E^3 中不存在常负高斯曲率的完备曲面.

$K\equiv -1$

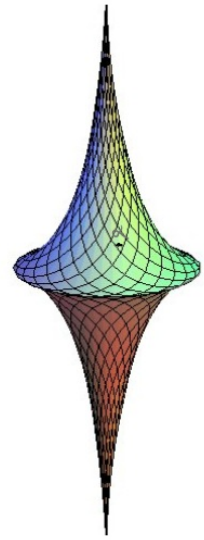
$\forall p\in M.\quad \exists\ r:(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M.$

s.t. $r(0,0)=p$

参数曲线均为弧长参数的渐近线

渐近 Chebyshev 网

$|r_u|=|r_v|=1$



伪球面

α 渐近方向之间夹角 $0<\alpha<\pi$

$\alpha = 2\varphi$ $\quad \underline{r=r(\xi,\eta)}$ $\quad \begin{cases}\xi=s+t\\ \eta=s-t\end{cases}$ $\quad \underline{r=r(s,t)}$ 渐近 Chebyshev 网

$k_1=\tan\varphi$

$e_1=\dfrac{r_\xi}{|r_\xi|}\quad e_2=\dfrac{r_\eta}{|r_\eta|},\quad e_3=e_1\wedge e_2$

$\omega^1=\cos\varphi\, d\xi\quad \omega^2=\sin\varphi\, d\eta \Rightarrow \omega_1^2=\varphi_\eta d\xi+\varphi_\xi d\eta$

$$\begin{cases}\omega_1^3=k_1\omega^1=\sin\varphi\, d\xi\\ \omega_2^3=k_2\omega^2=-\cos\varphi\, d\eta\end{cases}$$

Codazzi 方程 自然满足.

Gauss 方程 $-d\omega_1^2=K\omega^1\wedge\omega^2 \Rightarrow \boxed{\alpha_{\xi\xi}-\alpha_{\eta\eta}=\sin\alpha}$

sine - Gordon 方程

物理上有著名的方程 Klein- Gordon 方程

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\varphi=0$$

在 $r=r(s,t)$ 下, $\alpha_{st}=\sin\alpha$.

- M. $K\equiv-1$ E^3 中完备曲面 存在渐近 Chebyshev 网

i.e. $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow M \quad C^\infty$ $\quad (-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)$

$(s,t)\longmapsto f(s,t)$

s.t. $s\longmapsto f(s,t_0),\ s\in\mathbb{R}$ 弧长参数渐近线, $\forall$ 给定 $t_0\in\mathbb{R}$

$t\longmapsto f(s_0,t),\ t\in\mathbb{R}$. ⋯⋯, $\forall\ s_0\in\mathbb{R}$

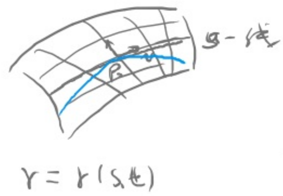
$t \longmapsto f(s_0,t)$, $t\in\mathbb{R}$ ... , $\forall\ s_0\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{推论} \Longrightarrow \exists\, \alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ \text{满足}\ \alpha_{st}=\sin\alpha}$$

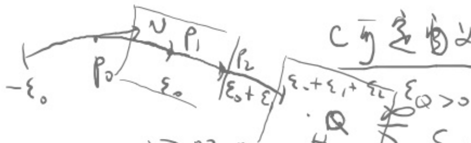
(i) $\forall\, P_0\in M$ 和 P_0 点处一个渐近方向 $v\in T_{P_0}M$

$\exists!$ 弧长参数渐近线 $c(s)$, $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

s.t. $c(0)=P_0$, $\dot c(0)=v$



(ii)



c可定义在 $(-\infty,\infty)$ 上!

问题是 若 $\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i<\infty$ $\quad [0, \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon_i)$, $<\infty$

$\{P_i\}$ Cauchy列 $d(P_i,P_{i+1})\le\varepsilon_i$ $\quad P_i\to Q\in M$ 完备

(iii)

$f:\mathbb{R}^2\to M$

$(s,t)\mapsto f(s,t)=\gamma_s(t)$

→ 过 $c(s)$ 点,与 $X(s)$ 相切的弧长参数渐近线

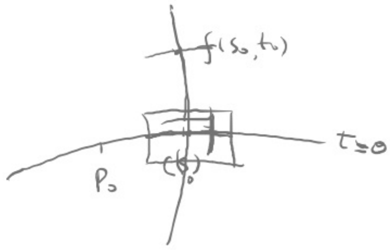
(iv) 要证 $\forall\, t\in\mathbb{R}$, $s\longmapsto f(s,t)$, $s\in\mathbb{R}$ 是弧长参数渐近线

只须证 $\forall\,(s_0,t_0)\in\mathbb{R}^2$, 曲线 $s\longmapsto f(s,t_0)$ 在 $|s-s_0|$ 充分小时 是弧长参数渐近线

$s-s_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$

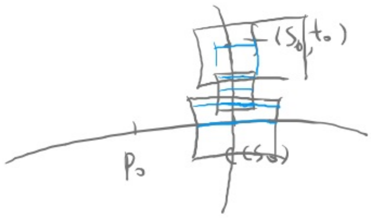
$c(s_0)$ 附近 $r=r(s,t)$ 渐近 Chebyshev

$r(s,0)=c(s)$, $-\varepsilon<s-s_0<\varepsilon$



若 $t_0\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ $\underline{f(s,t_0)=\gamma_s(t_0)=r(s,t_0)}$

$\{f(s_0,t):0\le t\le t_0\}$ 紧致的. 可以用有限片渐近 Chebyshev 网来覆盖.



• 不存在 C^∞ 函数 $\alpha:\underline{\mathbb{R}^2}\to\mathbb{R}$ 满足 $\underline{\alpha_{st}}=\sin\alpha$, $\underline{0<\alpha<\pi}$

证明. 反证 假设 $\exists$ 这样的 α $\qquad$ 休息到 8:40.

$\sin\alpha>\delta>0$

证明. 反证 假设∃这样的 α 　　　休息到 8:40.

" $\sin\alpha > 0$ " $\Rightarrow$ $\alpha_{st} > 0 \Rightarrow \alpha_s(t)$ 严格单增 　$\sin\alpha > \delta > 0$

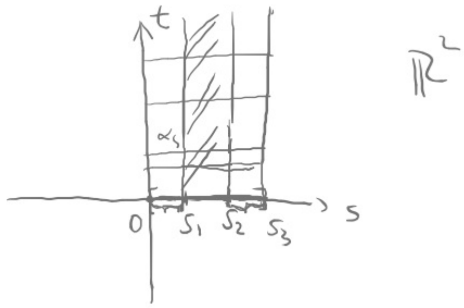
$\Rightarrow$ α_s 不恒为 0

不失一般性, 我们设 $\alpha_s(0,0) \neq 0$

$(s,t) \longmapsto (-s,-t)$

$\alpha(s,t)$ 　$\alpha(-s,-t)$ 仍满足 sine-Gordon 方程

不妨设 $\alpha_s(0,0) > 0$



$\exists\, s_3 > 0$, s.t. $\alpha_s(s,0)$, $s \in [0,s_3]$
上严格大于 0 !

$\Rightarrow \alpha_s$ 在 $[0,s_3] \times [0,\infty)$ 上严格大于 0

$\alpha_s(s,0) > 0$, $s \in [0,s_3]$

$s \longmapsto \alpha(s,0)$ 在 $s \in [0,s_3]$ 上严格单增 !

希望 $\sin\alpha > \delta > 0$? 　$\alpha(s,0)$, $s \in [s_1,s_2]$ 　$\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. $\alpha(s,0) \in (\varepsilon, \pi-\varepsilon)$

可以证明 $\alpha(s,t) \in (\varepsilon, \pi-\varepsilon)$, $(s,t) \in [s_1,s_2] \times [0,\infty)$

$\sin\alpha \geq \sin\varepsilon > 0$ on $[s_1,s_2] \times [0,\infty)$

$$\int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \alpha_{st}\, ds\, dt = \int_0^T \int_{s_1}^{s_2} \sin\alpha\, ds\, dt \geq \sin\varepsilon \cdot T \cdot (s_2 - s_1)$$

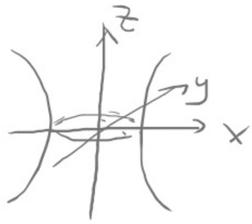
$$\int_0^T \alpha_t(s_2,t) - \alpha_t(s_1,t)\, dt$$

$$= \alpha(s_2,T) - \underbrace{\alpha(s_1,T)}_{>0} - \underbrace{[\alpha(s_2,0) - \alpha(s_1,0)]}_{>0} < \pi$$

令 $T \to \infty$, 矛盾 　□

注记: E^3 中存在负高斯曲率的完备曲面

单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



elliptic hyperboloid of one sheet

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 旋转面 $K = -\dfrac{1}{(2z^2+1)^2} < 0$

$x^2+y^2-z^2=1$ 旋转面 $K=-\frac{1}{(2z^2+1)^2}<0$

$z\to\infty$ $K\to 0$

<u>Efimov (1964)</u> <u>E^3中不存在 $K\leq-\delta,\ \delta>0$ 的完备曲面</u>

Cohn-Vossen 猜想

<u>Willmore 猜想</u> 1965

Gauss-Bonnet E^3中M 紧致曲面

$f: M\to E^3$ 嵌入

$$\frac{1}{2\pi}\int_{f(M)} K\,dV=\chi(M)$$

平均曲率 $\tau(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{f(M)} H^2\,dV$ 是否拓扑量?

$$\tau(M):=\inf_{f\in\mathcal{F}}\tau(f)$$ $\mathcal{F}$ 所有的M的光滑嵌入

拓扑量

$\tau(M)$, $\chi(M)$ 有什么关系?

<u>定理</u>:(Willmore 1965) M 亏格 $g=0$ (拓扑球面)

则有 $\tau(M)=\chi(M)=2$

证明: $H^2=K+\frac{1}{4}(k_1-k_2)^2$

$$\tau(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{f(M)}H^2\,dV=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{f(M)}K\,dV}+\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{f(M)}\frac{1}{4}(k_1-k_2)^2\,dV}$$

$$\geq\chi(M)=2$$

"=" $\Longleftrightarrow$ $k_1=k_2$ $\Longleftrightarrow$ 全脐 $\Longleftrightarrow$ 球面 (M紧) □

<u>定理</u>. 设M是E^3中紧致曲面, 有 $\frac{1}{2\pi}\int_M H^2\,dV\geq 2$

且 "=" 成立当且仅当 M是球面

证明: $$\frac{1}{2\pi}\int_M H^2\,dV\geq\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dV=\chi(M)=2-2g$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{M_+}K\,dV+\int_{M\setminus M_+}K\,dV\right)$$

$M_+=\{p\in M: K(p)\geq 0\}$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{M_+} K\,dv + \underbrace{\int_{M\setminus M_+} K\,dv}_{负}\Big) \qquad M_+=\{p\in M: K(p)\ge 0\}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_M H^2\,dv \ge \frac{1}{2\pi}\int_{M_+} H^2\,dv$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{M_+}\big(K+\underline{\tfrac{1}{4}(k_1-k_2)^2}\big)\,dv \ge \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{M_+} K\,dv}$$

<u>引理</u>: $\int_{M_+} K\,dv \ge 4\pi$

≥ 2

"=" $\Rightarrow$ $k_1=k_2$ on M_+

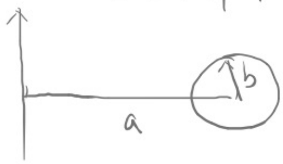
M cpt $\rightarrow$ $\exists p$ s.t. $K(p)>0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $k_1=k_2>0$ on M_+

$\Rightarrow$ $M\setminus M_+=\phi$

$\Rightarrow$ $k_1=k_2$ on M $\Rightarrow$ 球面 □

$g\ge 1$ $\tau(M)\ge 2$ 不 sharp. 更好下界?

旋转环面



$$\begin{cases} x=(a+b\cos u)\cos v \\ y=(a+b\cos u)\sin v \\ z=b\sin u \end{cases}$$

$0<b<a$, $u\in(0,2\pi)$, $v\in(0,2\pi)$

$\frac{b}{a}=c$ $\Rightarrow$ $\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{2\pi}\int_{f_{a,b}(T^2)} H^2\,\underline{dv} = \frac{\pi}{2c\sqrt{1-c^2}}$

$c\to 0$ $\tau(f_{a,b})\to\infty$

$c\to 1$ $\underline{\tau(f_{a,b})}\to\infty$ $\underline{c=\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\tau(f_{a,b})$ 达最小 π

<u>Willmore conj</u> $\tau(T^2)=\pi$?

$g\ge 1 \Rightarrow \tau(M)\ge\pi$?

elastic or bending energy 1810s Sophie Germain
1920s <u>Blaschke</u> Thomsen

Marques, Neves 2014. Annals. Math

1991 Mutz / Bensimon.

杨振宁 陈省身 "自然而真实". 下课

杨振宁 陈省身 "自然而真实". 下课