令D为主法线在单位球面上所围区域之一. 在D上应用Gauss-Bonnet,

有: $\iint_D K\,dv + \oint_{\partial D} k_g\,d\rho = 2\pi$.

其中 $K\equiv 1$, $\oint_{\partial D} k_g\,d\rho = \oint_{\partial D} \frac{d}{ds}(\arctan\frac{\tau}{k})\frac{ds}{d\rho}\,d\rho = 0$.

故 $\text{Area}(D) = \iint_D K\,dv = 2\pi$ 为单位球面面积之一半. □.

~~例~~ 球面的刚性: Liebmann 定理.

前面我们讨论曲面整体性质所用的基本工具是Stokes定理. 接下来我们讨论另外一种基本工具:

- E^3中紧致曲面上的连续函数f必在曲面上一点p取到最大值.

比如开圆盘$\{(x,y)\in E^2: x^2+y^2<1\}$上的连续函数

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$

达不到最大值, 故开圆盘不是紧致曲面.

若函数f光滑, 我们进一步有: 对任何过最大值点p的曲面上光滑曲线 $r=r(s)$ with $r(0)=p$, 有

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(r(s)) = 0, \quad \left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} f(r(s)) \leq 0.$$

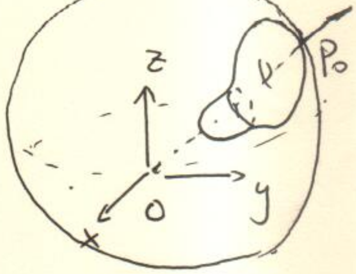
我们来讨论这一基本工具的应用.

<u>定理</u> (Liebmann 1899) 设M是E^3中一个紧致、连通、具有常Gauss曲率的曲面. 则M是一个球面.

注意到, 我们只假定Gauss曲率$K=\text{const}$, 结论已经可以说$K>0$.

我们先来证明如下事实。

<u>引理1.</u> 设 M 为 E^3 中的紧致曲面。则存在一点 $P_0\in M$ 它的 Gauss 曲率 $K(P_0)>0$.



<u>注记</u>：直观上，因为 M 为一有界闭集，必有一以 O 为心的球面把 M 包在内部且切于一点 P_0. 在该点 P_0 处 M 的弯曲超过球面，因此 $K(P_0)>0$.

证明：设 $r(p)=(x(p),y(p),z(p))$, $p\in M$ 为 M 的位置向量。

考查 M 上的函数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$p \longmapsto \langle r(p),r(p)\rangle = x(p)^2+y(p)^2+z(p)^2.$$

易见 f 光滑。M 的紧性意味着必存在一点 $P_0\in M$ 使得 f 在 P_0 点处达到极大值。

考虑任意过 P_0 点的 M 上弧长参数曲线 $r(s)$, $r(0)=P_0$.

我们有 $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(r(s))=0$.

即 $0=\langle \dot r(0), r(0)\rangle$. 由 $\dot r(s)$ 选取的任意性知 P_0 点位置向量 $r(0)=r(P_0)$ 与 P_0 处切平面垂直.

记 P_0 点处单位法向量为 $n(P_0)$. 则有 $r(P_0)=\lambda n(P_0)$, $\lambda\neq 0$.

又由 P_0 为 f 极大值点知

$$0\ge \left.\frac{d^2}{ds^2}\right|_{s=0} f(r(s)) = 2\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\langle \dot r(s), r(s)\rangle = 2\left(\langle \ddot r(0), r(0)\rangle + \langle \dot r(0),\dot r(0)\rangle\right)$$

$$= 2\left(\lambda\langle \ddot r(0), n(P_0)\rangle +1\right)$$

注意 $\langle \ddot{r}(0), n(P_0) \rangle = k_n(\dot{r}(0))$ 为 P_0 点处沿切向 $\dot{r}(0)$ 的法曲率.

故 $\lambda k_n(\dot{r}(0)) \leq -1$，即 $k_n(\dot{r}(0)) \begin{cases} \leq -\frac{1}{\lambda} & \text{if } \lambda>0 \\ \geq -\frac{1}{\lambda} & \text{if } \lambda<0 \end{cases}$

由切方向 $\dot{r}(0)$ 选取的任意性知 P_0 点处 Gauss 曲率

$$K(P_0) = \underbrace{k_1(P_0)\,k_2(P_0)}_{\text{两个主曲率}} \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0. \qquad \square$$

这个引理说明一个 E^3 中紧致曲面若具有常 Gauss 曲率，则必有常正高斯曲率。也即

推论：E^3 中不存在零 Gauss 曲率或常负高斯曲率的紧致曲面.

引理之：观察到如下事实：回忆两个主曲率 k_1, k_2 是 Weingarten 变换的两个特征值，由光滑性知 k_1, k_2 是 M 上的两个连续函数. 若 $K = k_1 k_2 = \text{const}$，若在 P_0 点主曲率函数 k_1 达最大值，则另一个主曲率函数 k_2 必达最小值. 关于这类点 P_0，我们有如下观察：

引理2 (Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 3rd ed. Leipzig 1909. Appendix 5)

设 P_0 是空间 E^3 中光滑曲面 M 上的一点，k_1, k_2 为主曲率函数，满足 (i) k_1 在 P_0 点达局部极大值

(ii) k_2 在 P_0 点达局部极小值

(iii) $k_1(P_0) > k_2(P_0)$

则 Gauss 曲率 $K(P_0) \leq 0$.

(257') ⑧

证明：由(iii)知 P_0 不是脐点，

即 k_1, k_2 在 P_0 处做为 Weingarten 变换的特征值都是单的。

故其相应特征向量在 P_0 附近光滑变化。

在 P_0 附近存在曲面片 ~~$r=r(u,v)$~~，在其上 k_1, k_2 光滑，且

存在参数化 $r=r(u,v)$ 使得 r_u, r_v 均为主曲方向，这称为

曲率线参数。在此参数化下，曲面的第一基本形式为

$$I = E\,du\otimes du + G\,dv\otimes dv$$

考虑正交活动标架 $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}$，$e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$，$e_3 = e_1\wedge e_2$.

则 $\omega^1 = \sqrt{E}\,du$，$\omega^2 = \sqrt{G}\,dv$.

回忆运动方程 $de_i = \omega_i^j e_j$，$\omega_i^j = -\omega_j^i$

及结构方程：$\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2\wedge\omega_2^1 \\ d\omega^2 = \omega^1\wedge\omega_1^2 \end{cases}$ (#)

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3\wedge\omega_3^2 \quad (\text{Gauß 方程})$$

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2\wedge\omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1\wedge\omega_1^3 \end{cases} \quad (\text{Codazzi 方程}).$$

由于 Weingarten 变换 $\mathcal{W}$ 满足

$$\mathcal{W}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

(总可通过适当的参数化使 $\frac{r_u}{\sqrt{E}} = e_1$ 对应 k_1)

我们有 $\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$

即 $\omega_1^3 = k_1\omega^1$，$\omega_2^3 = k_2\omega^2$ (*)

对(*)取外微分得 $\begin{cases} d\omega_1^3 = dk_1\wedge\omega^1 + k_1 d\omega^1 \\ d\omega_2^3 = dk_2\wedge\omega^2 + k_2 d\omega^2 \end{cases}$

代入(*)和 Codazzi 方程，有

$$\begin{cases} \omega_1^2\wedge \overbrace{\omega_2^3}^{k_2\omega^2} = dk_1\wedge\omega^1 + k_1\,\omega^2\wedge\omega_2^1 \\ \omega_2^1\wedge \underbrace{\omega_1^3}_{k_1\omega^1} = dk_2\wedge\omega^2 + k_2\,\omega^1\wedge\omega_1^2 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 0 = dk_1\wedge\omega^1 + (k_1-k_2)\,\omega_1^2\wedge\omega^2 \\ 0 = dk_2\wedge\omega^2 + (k_1-k_2)\,\omega_1^2\wedge\omega^1 \end{cases} \qquad (**)$$

代入

$$(dk_1)\wedge\omega^1 = \left((k_1)_u du + (k_1)_v dv\right)\wedge\sqrt{E}\,du = (k_1)_v\, dv\wedge\omega^1 = -\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\,\omega^1\wedge\omega^2$$

$$(dk_2)\wedge\omega^2 = \left((k_2)_u du + (k_2)_v dv\right)\wedge\sqrt{G}\,dv = (k_2)_u\, du\wedge\omega^2 = \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\,\omega^1\wedge\omega^2$$

到(**)得

$$\begin{cases} 0 = \left[-\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\,\omega^1 + (k_1-k_2)\,\omega_1^2\right]\wedge\omega^2 \\ 0 = \left[-\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\,\omega^2 + (k_1-k_2)\,\omega_1^2\right]\wedge\omega^1 \end{cases}$$

回忆M上任意一形式均可表为 $a\omega^1 + b\omega^2$.

不妨记 $(k_1-k_2)\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2$.

则有

$$\begin{cases} 0 = \left[-\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} + a\right]\omega^1\wedge\omega^2 \\ 0 = \left[-\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} + b\right]\omega^2\wedge\omega^1 \end{cases}$$

即 $a = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}},\ b = \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}$

也就是有

$$(k_1-k_2)\,\omega_1^2 = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\,\omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\,\omega^2 \qquad (***)$$

注记：通常我们从 $\begin{cases} d\omega^1 = a\,\omega^1\wedge\omega^2 \\ d\omega^2 = b\,\omega^1\wedge\omega^2 \end{cases}$ 来求 $\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2$.

在上述情况即有 $\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\,\omega^1 + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\,\omega^2$

这里我们从另一种途径得 ω_1^2，得到通过主曲率和E, G的表达式.

为求得Gauß曲率，我们需再对(***)求一次外微分

$$d(k_1-k_2)\wedge\omega_1^2+(k_1-k_2)\underbrace{d\omega_1^2}_{=-K\omega^1\wedge\omega^2}=d\left(\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\omega^1+\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\omega^2\right)$$

限制在P_0点处，由极值性质知 $dk_1(P_0)=dk_2(P_0)=0$，故

$$-(k_1-k_2)K\omega^1\wedge\omega^2(P_0)=d\left(\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\right)\wedge\omega^1+\frac{\overset{=0}{(k_1)_v}}{\sqrt{G}}d\omega^1+d\left(\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\right)\wedge\omega^2+\frac{\overset{=0}{(k_2)_u}}{\sqrt{E}}d\omega^2\Bigg|_{P_0}$$

$$=\left(\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}}\right)_v dv\wedge\omega^1+\left(\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}}\right)_u du\wedge\omega^2\Bigg|_{P_0}$$

$$=\frac{(k_1)_{vv}}{G}\omega^2\wedge\omega^1+\frac{(k_2)_{uu}}{E}\omega^1\wedge\omega^2\Bigg|_{P_0}$$

整理得 $K(P_0)=-\dfrac{1}{(k_1(P_0)-k_2(P_0))}\left(\dfrac{(k_2)_{uu}}{E}-\dfrac{(k_1)_{vv}}{G}\right)(P_0)$

注意 k_1在P_0取局部极大 推出 $(k_1)_{vv}(P_0)\le 0$

k_2在P_0取局部极小 推出 $(k_2)_{uu}(P_0)\ge 0$.

从而有 $K(P_0)\le 0$. □

现在，我们可以证明 Liebmann 1899 的结果了。这个证明~~S.S.Ch~~是陈省身先生基于Hilbert的证明给出的。(S. S. Chern, Some new characterizations of the Euclidean Sphere, Duke Math J. 12(1945), 270-290.)

证明：由引理1，知M的Gauß曲率为正常数。设k_1,k_2为M上的主曲率函数，$k_1\ge k_2$，可知k_1,k_2为连续函数。设k_1在P_0达极大值，由$K=k_1k_2$为常数知k_2在P_0达极小值。

若P_0点非脐点，我们有 $k_1(P_0)>k_2(P_0)$，则引理2告诉我们在P_0处上，$K(P_0)\leq 0$，矛盾。因此，P_0点为脐点，即 $k_1(P_0)=k_2(P_0)$。实际上，这意味着M上每点均为脐点：$\forall P\in M$，有

$$k_1(P_0)\geq k_1(P)\geq k_2(P)\geq k_2(P_0)=k_1(P_0)\Rightarrow k_1(P)=k_2(P).$$

回忆全脐点曲面(片)要么是平面的一部分要么是球面的一部分。由于 $K>0$，知是球面的一部分，又M连通，故M为一个半径为 $\frac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面的子集。紧性推出M为闭子集，M为光滑曲面(每点局部同胚于欧氏开区域)推出M为开子集。即M为一个半径为$\frac{1}{\sqrt{K}}$的球面的既开且闭的非空子集，故而M就是这个球面。 □

重新思考上述证明，我们发现在保证Gauss曲率>0的情况下，"Gauss曲率为常数"的条件只用到说明在k_1的极大值点k_2达极小值点，实际上，k_2是k_1的递减函数。

<u>定理</u>：设M是E^3中一个紧致连通，Gauss曲率为正的光滑曲面。如果存在~~函~~递减函数f，使得M的两个主曲率函数k_1，k_2，$k_1\geq k_2$满足 $k_2=f(k_1)$，则M为一个球面。

Gauss曲率 $K\equiv C_{>0}$ 意味着 $k_2=\frac{C}{k_1}$。同时，常平均曲率 $H\equiv C$ 意味着 $k_2=2C-k_1$！

<u>推论</u>：设M是E^3中一个紧致、连通、Gauss曲率为正的光滑曲面。如果M有常平均曲率，则M为一个球面。

<u>Gauss曲率为正</u> 可推出 M同胚于球面，也即亏格 $g=0$，(高斯博内)

1950年前后，Hopf 证明"$K>0$"条件可弱化为"同胚于球面"，即 ~~...~~ E^3中一个~~紧致连通~~同胚于球面的光滑曲面若具有常平均曲率，则必为球面。

1956年A. Alexandroff 证明"同胚于球面"条件可弱化为仅要求"紧致"。即"E^3中一个紧致连通具有常平均曲率的光滑曲面必为球面"。 257) ⑫