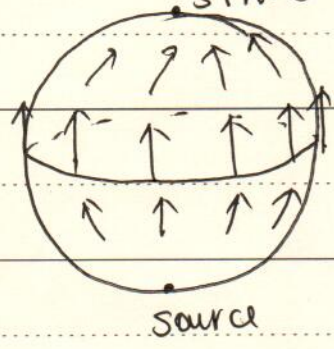


# Poincaré - Hopf index formula ([O'Neill §7.7])

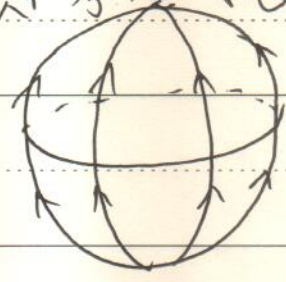
上面看到 Euler 示性数为零的性质联系着处处非零切向量场的存在性。下面我们来讨论这一性质的一个推广情形。

在一个一般的紧致无边可定向曲面上，虽然并不总是存在处处非零向量场，但是总可找到除有限点外非零光滑的向量场。例如



(取“北向”的切向量场)

其部分的 <sup>处处</sup> 用积分曲线表示如下



定义：一点  $p$  称为切向量场  $V$  的一个孤点奇点，如果  $V$  在  $p$  的一个小邻域  $N$  (除  $p$  外) 内非零、光滑。

在球面的例子中，南、北极即为两个孤点奇点。

对于一个切向量场  $V$  的孤点奇点  $p$ ，那我们寻求一个量来度量它有多“坏”。

取  $p$  点周围一个足够小邻域  $D$ ，使其落入包含  $p$  的一个坐标邻域内，且  $D$  中不包含除  $p$  外的其他奇点。给  $D$  一个定向，该定向诱导一个有向的边界，记为  $C := \partial D$ 。

注意，在  $D$  上，我们总可取到一个无奇点的光滑切向量场  $X$ 。(如，我们可取  $r, \theta$  过程  $r = r(u, v)$  为  $D$  的一个正则参数化)。我们的想法是去比较向量场  $V$  与  $X$ 。

令  $\alpha: [a, b] \rightarrow C = \partial D$  为有向边界  $C$  的一个参数化。我们取沿曲线  $C$  的角度函数  $L_\alpha(X, V)$  (从  $X$  到  $V$  的有向角)。

记  $\varphi := \angle_\alpha(X, V)$ .

注意  $V$  限制到  $\mathbb{C}^k$ , 即  $V$  沿  $\mathbb{C}$  移动一圈后回到原位置。  
故可知  $\varphi(b) - \varphi(a)$  是  $2\pi$  的整数倍。

定义 (指标) 一个切向量场  $V$  在  $p$  点的指标 (index) 是如下整数

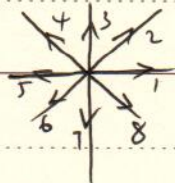
$$\text{ind}(V, p) := \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}$$

注记: 直接从定义来看,  $\text{ind}(V, p)$  应依赖于  $X$  的选取。实际上, 我们仍看到, 这个依赖性是不存在的。 $\text{ind}(V, p)$  也不依赖于  $D$  的选取。

指标 (index) 是个很直观的概念, 它实际上是向量场  $V$  在  $p$  点周围 (相对于  $X$ ) 的总转数。

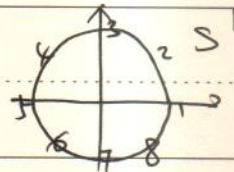
例子: 非奇点  $p$ : index 0

source:

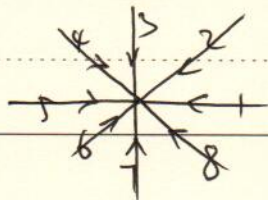


index +1

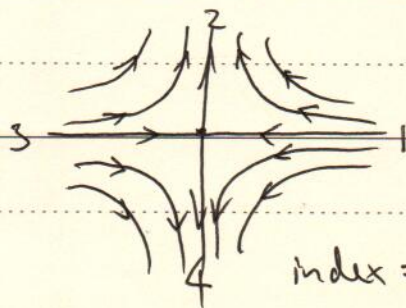
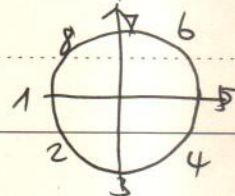
取  $X$  为处处  $\rightarrow$  方向



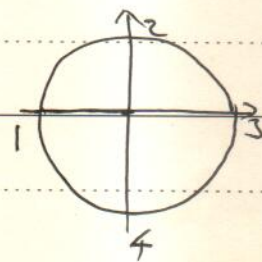
sink

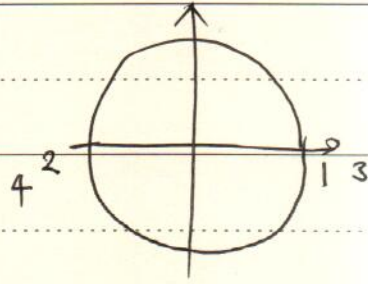
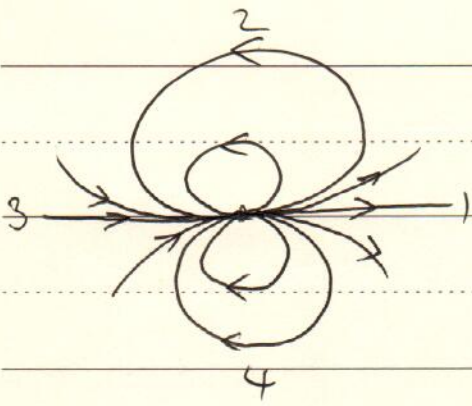


index: +1 again!!



index = -1





index = +2

定理: (Poincaré-Hopf) 设  $M$  为一紧致无边<sup>可定向</sup>曲面. 设  $V$  为  
其上光滑且在除孤立奇点  $p_1, \dots, p_k$  外非零的一个向量场.  
则  $M$  的 Euler 示性数等于  $V$  的指标的积, 即

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_M k \, dV = \sum_{i=1}^k \text{ind}(V, p_i)$$

拓扑量      几何量      微分拓扑量

证明: 首先看到, 我们可选定向的小区域  $D_i$ , 使  $D_i$  不包含除  $p_i$  外  
的其他奇点, 且  $D_i$  落入含  $p_i$  的一个坐标邻域内. 则  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i$   
的内部, 记为  $M$ . 则我们有:

(i) 在  $M$  上,  $V$  非零, 则可取

$$e_1 = \frac{V}{|V|}, \quad e_2 = e_3 \wedge e_1 = n \wedge e_1$$

在此正交标架下, 记其联络形式为  $\bar{\omega}^2$ .

(ii) 在每一个  $D_i$  上, 可选一处处非零光滑向量场  $X_i$ . 则可取

$$e_1 = \frac{X_i}{|X_i|}, \quad e_2 = e_3 \wedge e_1 = n \wedge e_1$$

在此正交标架下, 记其联络形式为  $\omega^2$ .

因此对高斯曲率  $K$ , 有

$$\iint_M K \, dV = \iint_M K \, dV + \sum_{i=1}^k \iint_{D_i} K \, dV$$

$$\text{其中 } \iint_M k dv = \iint_M k \omega^1 \wedge \omega^2 = - \iint_M d\bar{\omega}^2 \stackrel{\text{Stokes'}}{=} - \int_{\partial M} \bar{\omega}^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{C_i} \bar{\omega}^2$$

这里  $C_i$  是  $\partial D_i$  带有  $\partial_i$  诱导的定向. 这个定向与由  $M$  诱导的定向相反. 回忆我们关于平行移动向量场角度的计算, 我们有如下事实:

沿简单闭曲线

设  $P_i$  是沿  $C_i$  平行移动  $v$  的向量场, 我们记  $\bar{\varphi}_i = -\bar{\omega}^2$   
 $\bar{\varphi}_i := \angle(V, P_i)$  (从  $V$  到  $P_i$  的角)

记  $C_i$  的弧长参数为  $C_i: r_i = r_i(s), s \in [0, L(C_i)]$ , 则

$$\text{有 } \bar{\varphi}_i(L(C_i)) - \bar{\varphi}_i(0) = - \int_{C_i} \bar{\omega}^2 \quad \frac{k}{2\pi} (\bar{\varphi}_i(L) - \bar{\varphi}_i(0)) = \iint_{D_i} k dv$$

同样地, 记  $\varphi_i := \angle(X_i, P_i)$ , 则有

$$\begin{aligned} \varphi_i(L(C_i)) - \varphi_i(0) &= - \int_{C_i} \omega^2 = \iint_{D_i} k \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= \iint_{D_i} k dv. \end{aligned}$$

$$\text{于是, 有 } \iint_M k dv = \sum_{i=1}^k \left( (\bar{\varphi}_i + \varphi_i)(L(C_i)) - (\bar{\varphi}_i + \varphi_i)(0) \right)$$

重要观察: 有向角的总和不唯一, 可相差  $2\pi$  的整数倍. 在  $C_i$  的起始点  $r_i(0)$  处, 我们总可取  $\angle(X_i, P_i)$ ,  $\angle(P_i, V) = -\angle(V, P_i)$  使得

$$\angle(X_i, P_i) + \angle(P_i, V) = \angle(X_i, V) \quad (*)$$

$$\text{亦即 } \varphi_i(0) - \bar{\varphi}_i(0) = \angle(X_i, V)(0).$$

然后, 由  $\varphi_i, \bar{\varphi}_i$  的连续性, 知  $(*)$  的公式在整条  $C_i$  上成立。

因此,  $\varphi_i - \bar{\varphi}_i = \angle(X_i, V)$

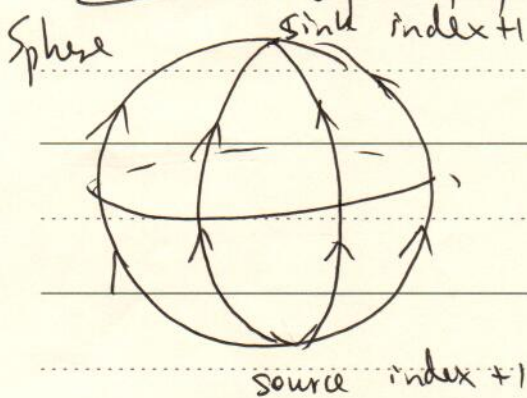
注意到  $\text{ind}(V, p_i) = \frac{\angle(X_i, V)(L(C_i)) - \angle(X_i, V)(0)}{2\pi}$

故有:  $\iint_M k dV = \sum_{i=1}^k 2\pi \text{ind}(V, p_i)$

即  $\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_M k dV = \sum_{i=1}^k \text{ind}(V, p_i)$  □

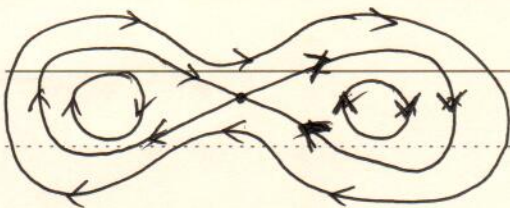
注记: 特别地, 上述证明告诉我们, index 的定义, 不依赖于  $D_i$  的选取, 不依赖于  $X_i$  的选取. 因为我们如果改变某  $p_i$  处,  $X_i, D_i$  的选取, 其值并不变. ( $\therefore \chi(M)$  不变) □

注记: 一个新计算 Euler 示性数的方法:



$\chi(S^2) = (+1) + (+1) = 2$

double torus



index = -1

$\chi(T^2) = (-1) + (-1) = -2$

"meeting of two streams type"

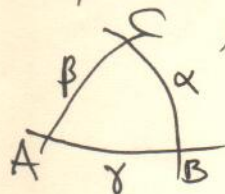
Jacobi's (remarkable) curve theorem.

Refs. J. McCleary, On Jacobi's remarkable curve theorem,

Historia Mathematica 21 (1994), 377-385.

回忆 Gauss 在 1827 年文章中证明了曲面片上 - 测地三角形  $\Delta ABC$

满足  $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \iint_{\Delta ABC} K dV.$

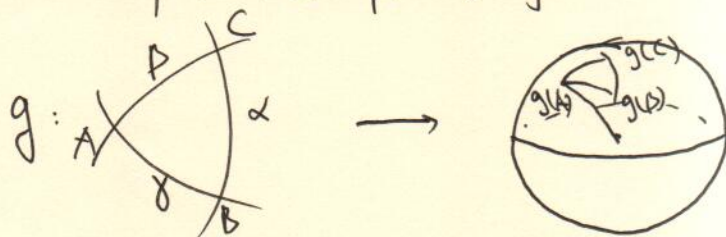


在 1848 年, Bonnet 做了重要推广, 三角形  $\Delta ABC$  的边  $\gamma$  为曲面片上任意曲线,

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \iint_{\Delta ABC} K dV + \oint_{\partial \Delta ABC} k_g ds$$

其中  $k_g$  为 Bonnet 引入的曲面上曲线的 测地曲率:

实际上, Gauss 的工作发表后, 引起了一大批几何学家的兴趣。在 Gauss 和 Bonnet 的工作之间, 还有另外的推广。德国数学家 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) 在 1836 年的文章中做了另一种 Gauss 定理的推广: Jacobi ~~还~~ 试图理解 Gauss 繁杂计算背后的几何原理, 他这样来看 Gauss 的结果: 回忆高斯映射



将曲面片上每一点映为球面上相应曲面片上单位法向量对应的单位球面上的点。而  $K = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$  为单位球面上面积元 (有向) 和曲面片上 (有向) 面积元之比, 故

(2571) ②

$\iint_{\Delta ABC} k dv$  为 单位球面上相应三角形  $\Delta g(A)g(B)g(C)$

的(有向)面积. 测地三角形  $\Delta ABC$  之诸边均为测地线意味着其上点处之曲面单位法向量与曲线的正法向量 ( $\frac{dr}{ds}$  的单位化) 共线. 在 Jacobi 对 Gauss 定理之此种理解下, 他给出了如下定理.

定理 (Jacobi) 考虑由 <sup>两条</sup> 空间曲线给出之三角形  $\Delta ABC$ . 考虑沿曲线之正法向量. 若正法向量处处非零, 且在相交点处正法向量 ~~共线~~ 吻合.

则由正法向量确定单位球面上三角形  $\Delta XYZ$ . 则有

$$\text{area}(\Delta XYZ) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

实际上 Jacobi 在 1836 年文章中给出了两种证明. 第一个证明是应用 Gauss 的定理. Jacobi 称对 ~~两条~~ 空间曲线 (两两相交) 可以看作某曲面上之测地线, 从而可应用 Gauss 关于测地三角形之结果直接得到. 第二个证明, Jacobi 试图解释 Gauss 计算之背后之几何原理, 他运用了球面几何的技巧证明这个定理.

1842 年, Thomas Clausen (1801-1885) 发表文章指出 Jacobi 之第一种证法有错误. 实际上, 即使对两条相交之空间曲线, 在交点处有相同之正法向量, 有可能它们不能看成任何曲面之测地线. Clausen 的文章投到 "Astronomische Nachrichten" 给 H.C. Schumacher. Schumacher 就写信给 Gauss 审稿. 1842 年 9 月 3 日, Gauss 回信说 Clausen 之质疑是 ~~com~~ 完全可靠和合适的. 1842 年 9 月-10 月间, Jacobi 迅速之写了回信文章, 也同样发表在 Astronomische Nachrichten 上.

Jacobi 不仅想说明他结果的正确性, 还想说明他看待 Gauss 定理的方法的正确性。为此目的, 他在 1842 年文章中 (1842) 叙述了如下

推论 (Jacobi 1842). 设  $C$  为空间中的光滑闭曲线, 弧长参数化  $r=r(s)$   <sup>$s$  弧长,  $K(s) > 0$</sup> . 若其主法向量的终点, 在 (起点) 置于原点在单位球面上画出的曲线 (称为主法标线 principle normal indicatrix) 是一条简单闭曲线, 则它将单位球面分成 面积相等 的两部分.

注记: 若将 Jacobi 定理应用于  $C$ , 则有主法标线在单位球面上围成区域面积为  $3\pi - \pi = 2\pi = \frac{1}{2} \times 4\pi$ . 球面面积的一半! 我们下面给这个推论的一个应用 Gauss-Bonnet 定理的证明, 也是一个分析 (analytic) 的证明.

证明: 考查  $C$  的 Frenet 标架  $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$ .

图 42 运动方程为

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = k(s)e_2(s) \\ \frac{de_2}{ds} = -k(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s) \\ \frac{de_3}{ds} = -\tau(s)e_2(s) \end{cases}$$

则其主法标线为  $s \mapsto e_2(s)$ . 注意此时  $s$  不一定是弧长参数. 设  $P$  为主法标线的弧长由

$$P(s) = \int_0^s \left| \frac{de_2}{ds} \right| ds = \int_0^s \sqrt{k^2 + \tau^2} ds$$

则  $\frac{dP}{ds} = \sqrt{k^2(s) + \tau^2(s)}$

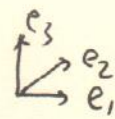
主法标线在球面上的测地曲率为:



$$k_g = \left\langle \frac{d^2 e_2}{dp^2}, e_2 \wedge \frac{de_2}{dp} \right\rangle \begin{array}{l} \leftarrow \text{单位切向量} \\ \uparrow \\ \text{曲面位置向量} = \text{法向量} \end{array}$$

(257) (4)

计算  $\frac{de_2}{dp} = \frac{de_2}{ds} \frac{ds}{dp} = (-ke_1 + \tau e_3) \frac{ds}{dp}$



故  $e_2 \wedge \frac{de_2}{dp} = (ke_3 + \tau e_1) \frac{ds}{dp}$

$$\frac{d^2 e_2}{dp^2} = \frac{d}{ds} \left[ (-ke_1 + \tau e_3) \frac{ds}{dp} \right] \left( \frac{ds}{dp} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} (-ke_1 + \tau e_3) \left( \frac{ds}{dp} \right)^2 + (-ke_1 + \tau e_3) \frac{d}{ds} \left( \frac{ds}{dp} \right) \frac{ds}{dp}$$

$$= (-k'e_1 - k(ke_2) + \tau'e_3 + \tau(-\tau e_2)) \left( \frac{ds}{dp} \right)^2$$

$$+ (-ke_1 + \tau e_3) \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \right) \frac{ds}{dp}$$

$$= (-k'e_1 - (k^2 + \tau^2)e_2 + \tau'e_3) \left( \frac{ds}{dp} \right)^2$$

$$+ (-ke_1 + \tau e_3) \frac{-(2k\tau + 2\tau\tau')}{(k^2 + \tau^2) \cdot 2\sqrt{k^2 + \tau^2}} \frac{ds}{dp}$$

$$= (-k'e_1 - (k^2 + \tau^2)e_2 + \tau'e_3) \left( \frac{ds}{dp} \right)^2$$

$$- (-ke_1 + \tau e_3)(k\tau' + \tau\tau') \left( \frac{ds}{dp} \right)^4$$

从而有  $k_g = \left\langle \frac{d^2 e_2}{dp^2}, (ke_3 + \tau e_1) \frac{ds}{dp} \right\rangle$

$$= (-k'\tau + \tau'k) \left( \frac{ds}{dp} \right)^3 + 0$$

$$= \frac{k\tau' - k'\tau}{k^2 + \tau^2} \frac{ds}{dp}$$

$$= \frac{d}{ds} \left( \arctan \frac{\tau}{k} \right) \frac{ds}{dp} \quad \left( \text{图 4.2} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

令  $D$  为赤道线在单位球面上所围区域之一。在  $D$  上应用 Gauss-Bonnet, (257) (5)

$$\text{有: } \iint_D k \, dV + \oint_{\partial D} k_g \, ds = 2\pi.$$

$$\text{其中 } K \equiv 1, \quad \oint_{\partial D} k_g \, ds = \oint_{\partial D} \frac{d}{ds} \left( \arctan \frac{\tau}{k} \right) \frac{ds}{ds} \, ds = 0.$$

$$\text{故 } \text{Area}(D) = \iint_D k \, dV = 2\pi \text{ 为球面面积之半. } \square.$$