微分几何(H) 作业26

2022年12月7日 11:27

旋转曲面的全曲率

考查旋转曲面

$$r = r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),\ f>0$$

令 Z_{ab}, $a<b$ 为两个分别对应 $u=a$, $u=b$ 的纬圆所夹区域。

(1) 证明 Z_{ab} 的全曲率 $\iint_{Z_{ab}} K\,dV = 2\pi(\sin\varphi(a)-\sin\varphi(b))$

其中 φ 为 x-z 平面中向量 $\overrightarrow{(0,1)}$ 到母线 $u\mapsto(f(u),g(u))$ 的切向量的~~有向角~~夹角使得 $v=\cos\varphi\,\overrightarrow{(0,1)}+\sin\varphi\,\overrightarrow{(1,0)}$

其中 v 为母线的单位切向量。

(2) 利用 (1) 说明若母线为光滑简单闭曲线，则相应旋转曲面的全曲率为零。

(3) 计算旋链面(Catenoid)的全曲率。

(即以 $x=a\cosh\frac{z}{a}$, $z\in(-\infty,\infty)$ 为母线的旋转面)。