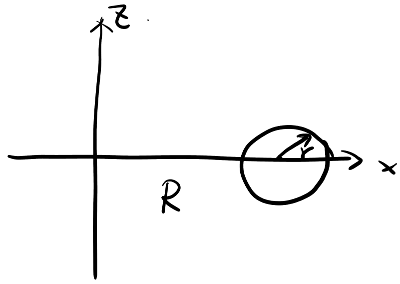
微分几何(H) 作业28

2022年12月13日 15:19



1. 设 T 是 x-z 平面上以 $(R,0)$ 为心，r $(<R)$ 为半径的圆绕 z 轴旋转所得 E^3 中的环面。

(i) 求 T 在曲面片 $r=r(u,v)=\big((R+r\cos u)\cos v,\ (R+r\cos u)\sin v,\ r\sin u\big)$，$u\in(0,2\pi)$，$v\in(0,2\pi)$ 的单位法向量场。

(ii) 描述 T 在高斯映射下的像，并计算 $\iint_T K\,dV$.

(不要用 Gauss-Bonnet 定理，用 T 高斯映射像的定向)。

2. 设 V 是上曲面 M 上的光滑切向量场，p 为其孤立奇点，令 X 为含 p 的曲面片上处处非零光滑切向量场。令 D 为含 p 的且包含在上述曲面片内的同胚于开圆盘的区域。令 $C=\partial D$，参数化为 $\alpha:[a,b]\to C$.
记 $\varphi=\angle(X,V)$ 为 $[a,b]$ 上函数，即曲线 C 上相应点处切向量 X 到 V 的有向角的一个连续化选取.

(i) 若 $\|X\|=1$. 证明

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b \frac{fg'-gf'}{f^2+g^2}\,dt$$

其中 $f=\langle V,X\rangle$，$g=\langle V,J(X)\rangle$.

(ii) 对于 E^2 上不过原点的正则平面闭曲线若可保定向地重新参数化为

$$c(t)=\big(\rho(t)\cos\theta(t),\ \rho(t)\sin\theta(t)\big),\quad t\in[a,b]$$

其关于原点的 winding number 定义为

其关于原点的 winding number 定义为

$$\mathrm{wind}(c) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

证明 $\mathrm{ind}(V,p)$ 是平面曲线 $(f,g):[a,b]\to E^2$ 的 winding number.