微分几何(H) 作业31

2022年12月22日 9:38

1. 证明课上讲的 Herglotz 对于 Cohn-Vossen 定理证明中的遗留部分：(i) 验证 $(r, n, d(f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)) = 0$

(ii) 证明 $\det(f_*) < 0$ 时有

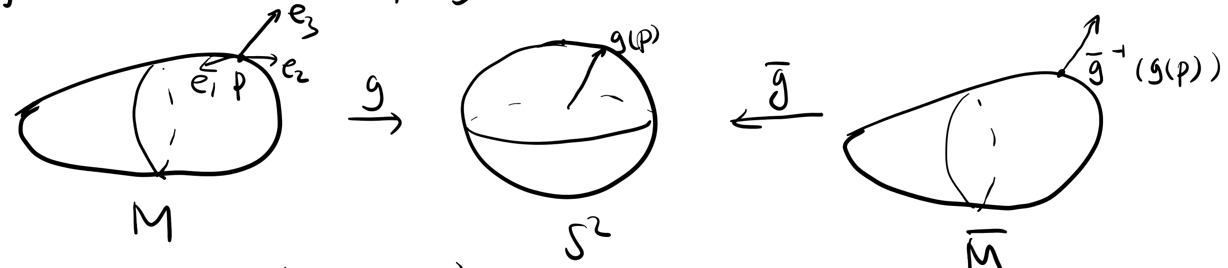
$$h_{\alpha\beta} = -\overline{h}_{\alpha\beta} \circ f \quad , \alpha, \beta = 1, 2 .$$

2. 设 $M, \overline{M}$ 为 E^3 中两个卵形面。设 S^2 为 E^3 中一个单位球面映射 $g: M \to S^2$，$\overline{g}: \overline{M} \to S^2$ 为高斯映射。

若存在 S^2 上正值函数 $K: S^2 \to \mathbb{R}_{>0}$，使得 $M, \overline{M}$ 的高斯曲率函数分别为 $K = K \circ g$，$\overline{K} = K \circ \overline{g}$，

则 $M, \overline{M}$ 相差一个平移。

提示：



在 M 的一个曲面片上取正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3 = n\}$，易见 $\forall p \in M$，M 在 p 点处、S^2 在 $g(p)$ 点处，$\overline{M}$ 在 $\overline{g}^{-1}(g(p))$ 点处法向量平行（相差一个平移）。

将 e_1, e_2 在 E^3 中平移到 S^2，$\overline{M}$ 的相应点处得 S^2、$\overline{M}$ 上正交活动标架。$M, S^2, \overline{M}$ 上诸微分1-形式记为

M: $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$

S^2: $\theta^1, \theta^2, \theta_1^2, \theta_1^3, \theta_2^3$

$\overline{M}$: $\overline{\omega}^1, \overline{\omega}^2, \overline{\omega}_1^2, \overline{\omega}_1^3, \overline{\omega}_2^3$.

只需证

$$\omega^\alpha = (\overline{g}^{-1} \circ g)^* \overline{\omega}^\alpha \quad , \alpha = 1, 2$$

$$\omega_\alpha^3 = (\overline{g}^{-1} \circ g)^* \overline{\omega}_\alpha^3 \quad , \alpha = 1, 2$$

作为 M 上 1-形式

$$\omega_\alpha^3 = (\bar g^{-1}\circ g)^* \,\bar\omega_\alpha^3, \quad \alpha=1,2$$

或等价地，作为 S^2 上 1-形式，去证

$$\begin{cases} (g^{-1})^*\omega^\alpha = (\bar g^{-1})^*\omega^\alpha, \quad \alpha=1,2 & (\mathrm{I}) \\ (g^{-1})^*\omega_\alpha^3 = (\bar g^{-1})^*\bar\omega_\alpha^3, \quad \alpha=1,2 & (\mathrm{II})\end{cases}$$

实际上(II)比较简单. 要证(I)可用积分公式，模仿今天课上证明的套路.

积分公式提示：考查 S^2 上 1-形式 $\psi = (r\circ g^{-1}, \bar r\circ \bar g^{-1}, d(\bar r\circ\bar g^{-1}))$.