1956年A.Alexandroff 证明"同胚于球面"条件可弱化为仅要求"紧致"。即"E^3中一个紧致连通具有常平均曲率的光滑曲面必为球面"。

凸曲面：Hadamard 定理.

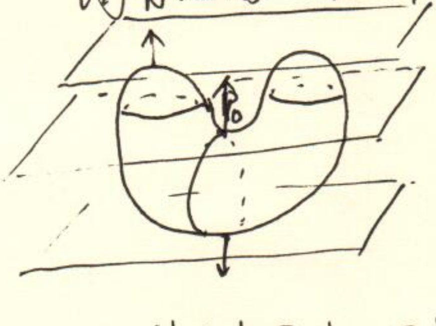
另外一种思考"E^3中紧致连通、高斯曲率>0的光滑曲面"的方式是凸性.

定义：E^3中的光滑曲面M称为凸曲面，如果M位于每点切平面的同一侧。也即，对$\forall P_0 \in M$，函数 $f: M \to \mathbb{R}$，
$f(p) := \langle r(p) - r(P_0), n(P_0) \rangle$ 不变号（要么$f \geq 0$ 要么$f \leq 0$），其中
$r(p)$为位置向量，$n(p)$为单位法向量.

我们首先证明 Hadamard (1897) 的一个定理.

定理 (Hadamard) 设M为E^3中的紧致（连通）曲面。若M的高斯曲率K处处为正，则M是凸曲面。

注记：这个定理直观上容易理解。若有一点P_0其切平面两侧均有曲面的点，直观上P_0处高斯曲率为负。我们的证明基于



如下稍不平凡的观察：紧致曲面应夹于另两个平行于P_0点处切平面的两个切平面之间，则曲面上有至少三点处法向量平行，从而其中余有两点单位法向量相同。这就意味着，从曲面出发的高斯映射 $g: M \to S^2$ 不是单射。然而我们有如下引理：

引理：设M为E^3中紧致(连通)，$K>0$的光滑曲面。

则高斯映射 $g: M \longrightarrow S^2$ 是1:1映射.

证明：我们先来证明 $g: M \to S^2$ 是满射。也即对任意 $e \in S^2$，

要证明 $\exists P_0 \in M$ s.t. $n(P_0) = g(P_0) = e$.

为此目的，考虑函数 $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(P) = \langle g(P), e \rangle$
$= \langle n(P), e \rangle$.
$\forall P \in M$.

又观察到，若 $n(P_0)=e$，则 $f(P_0)=1$，而 $|f(P)| \leq 1$，$\forall P \in M$.

故我们考查函数的最大值点 P_0. 取包含 P_0 的曲面片，

设其有参数化 $r = r(u,v)$ 使得 $\langle r_u, r_v \rangle \equiv 0$. 由极值性质

知 $df(P_0)=0$. 即

$$0 = d\langle n, e \rangle \big|_{P_0} = \langle dn, e \rangle \big|_{P_0} = \langle n_u du + n_v dv, e \rangle \big|_{P_0}$$

$$= \langle n_u, e \rangle du + \langle n_v, e \rangle dv \big|_{P_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \langle n_u, e \rangle \big|_{P_0} \\ 0 = \langle n_v, e \rangle \big|_{P_0} \end{cases} \quad (*)$$

回忆，若从 $\begin{cases} \langle n_u, r_u \rangle = -L \\ \langle n_u, r_v \rangle = -M \end{cases}$ 可解得 $n_u = a r_u + b r_v$，$\begin{cases} aE = -L \\ bG = -M \end{cases}$

即 $n_u = -\frac{L}{E} r_u - \frac{M}{G} r_v$

类似地，有 $n_v = -\frac{M}{E} r_u - \frac{N}{G} r_v$

从而 (*) 可写成 $\begin{cases} 0 = -\frac{L}{E} \langle r_u, e \rangle - \frac{M}{G} \langle r_v, e \rangle \big|_{P_0} \\ 0 = -\frac{M}{E} \langle r_u, e \rangle - \frac{N}{G} \langle r_v, e \rangle \big|_{P_0} \end{cases}$ (**)

由假设 $K(P_0)>0$. 知

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{L}{E} & -\frac{M}{G} \\ -\frac{M}{E} & -\frac{N}{G} \end{pmatrix} \Bigg|_{P_0} = \frac{LN - M^2}{EG}(P_0) > 0.$$

综方程(※)得 $\langle r_u, e\rangle(P_0) = \langle r_v, e\rangle(P_0) = 0$.

即 $e = \pm n(P_0)$.

再由 P_0 的极大性，知

$$\begin{cases} \text{(i)}\ 0 \geq f_{uu}(P_0) = \left\langle \left(-\frac{L}{E}r_u - \frac{M}{G}r_v\right)_u, e\right\rangle\Big|_{P_0} = \left\langle -\frac{L}{E}r_{uu} - \frac{M}{G}r_{vu}, e\right\rangle\Big|_{P_0} \\ \text{(ii)}\ 0 \geq f_{vv}(P_0) = \left\langle \left(-\frac{M}{E}r_u - \frac{N}{G}r_v\right)_v, e\right\rangle\Big|_{P_0} = \left\langle -\frac{M}{E}r_{uv} - \frac{N}{G}r_{vv}, e\right\rangle\Big|_{P_0} \end{cases}$$

若 $e = -n(P_0)$，则 $\langle r_{uu}, e\rangle|_{P_0} = -L$，$\langle r_{uv}, e\rangle|_{P_0} = -M$，

代入(i)得 $0 \geq \frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G}$

类似的，(ii)推出 $0 \geq \frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G}$。也就是 P_0 点处有 $L=M=N=0$.

这与高斯曲率 $K(P_0)>0$ 矛盾.

因此，我们推出 $e = n(P_0)$. 满射得证。

下证高斯映射 $g: M \to S^2$ 是单的。反证法：设存在两点、

$P, Q \in M$ 使得 $g(P) = g(Q) = e \in S^2$. 注意到

$$K = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$$ 是高斯映射的Jacobi.

故由 $K>0$，及反函数定理知，P, Q 存在邻域 W_P, W_Q s.t.

$$\left.\begin{aligned} g&: W_P \to g(W_P) \\ g&: W_Q \to g(W_Q) \end{aligned}\right\}$$ 为微分同胚.

不妨设 $W_P \cap W_Q = \phi$，$g(W_P) \subset g(W_Q)$

故Gauss映射 g 在 $M \setminus W_P$ 上仍是满射. 故而

$$\int_{M\setminus W_P} K\,dV \geq \int_{S^2} d\sigma = 4\pi.$$

$d\sigma$：单位球面面积元

然而 $\int_M K\,dV = 4\pi$ （这是因为 $K>0 \Rightarrow \int_M K\,dV > 0 \Rightarrow \chi = 2$）

这导出矛盾
$$4\pi = \int_M K\,dV = \int_{W_p} K\,dV + \int_{M\setminus W_p} K\,dV$$
$$> \int_{M\setminus W_p} K\,dV \geq 4\pi. \quad \square$$

定理(Hadamard)的证明：

反证. 若不然, $\exists\, P_0 \in M$ 使得 $f(p) := \langle r(p) - r(P_0), n(P_0)\rangle$ 变号. 即 $\{p\in M: f(p)>0\}$, $\{p\in M: f(p)<0\}$ 均非空.

设 Q_1, Q_2 分别为 f, $-f$ 在 M 上的最大值点. 类似于引理的论证知 $n(P_0)$ 也与 Q_1, Q_2 处切平面垂直。

也即 Q_1, Q_2, P_0 三点处单位法向量平行。则少有其中两个相等。这与 Gauss 映射为单值。 $\square$.

定义：我们称 E^3 中高斯曲率 >0 的紧致曲面为卵形面 (ovaloid).

注记：若将定理中假设 "$K>0$" 弱化为 "$K\geq 0$", 定理仍成立。证明可见 S.S. Chern, R.K. Lashof, On the total curvature of immersed manifolds I., Amer. J. Math. 79 (1957), 302-318.
II., Michigan. Math. J. 59 (1958), 5-12.

紧致曲面：积分公式

下面我们再回到整体微分几何的另一基本工具：Stokes 公式.

这里的基本原则如下：在 E^3 中的紧致曲面 M 上, 若能找到一个整体定义的微分一形式 ϕ, 则由 Stokes 公式 $\int_M d\phi = 0$.

若 $d\phi$ 有特别的表达式, 这将推出非常有趣的结论

设 M 为 E^3 中的一个紧致曲面. 考虑其上1-形式

$$(r, n, dn).$$

其中 r 为位置向量, n 为单位法向量 (E^3中曲面紧致 $\Rightarrow$ 可定向). 此1-形式是整体定义的. 下面要计算其外微分. 我们更进一步看一下这个1-形式.

记 $r=(r^1,r^2,r^3)$, $n=(n^1,n^2,n^3)$ 则有

$$(r,n,dn)=\begin{vmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \end{vmatrix}$$

$$=(r^2n^3-r^3n^2)dn^1-(r^1n^3-r^3n^1)dn^2+(r^1n^2-r^2n^1)dn^3$$

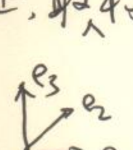
故
$$d(r,n,dn)=d(r^2n^3-r^3n^2)\wedge dn^1-d(r^1n^3-r^3n^1)\wedge dn^2+d(r^1n^2-r^2n^1)\wedge dn^3$$

$$\doteq\begin{vmatrix} dr^1 & dr^2 & dr^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \\ dn^1 & dn^2 & dn^3 \end{vmatrix}$$

这里要注意后面的行列式中, 作为"系数"的微分形式相乘要取"外积" 且顺序要特别注意, 不能交换!

于是我们在每个局部进行如下计算: 在每个曲面片上, 取正交标架

$$e_1,\ e_2,\ e_3=n$$



利用运动方程和结构方程计算

$$d(r,n,dn)\doteq(dr,n,dn)+(r,dn,dn)$$

其中
$$(dr,n,dn)=(\omega^1e_1+\omega^2e_2,\ e_3,\ \omega_3^1e_1+\omega_3^2e_2)$$
$$=\langle\omega^1e_1+\omega^2e_2,\ \ e_3\wedge(\omega_3^1e_1+\omega_3^2e_2)\rangle$$
$$=\langle\omega^1e_1+\omega^2e_2,\ \ \omega_3^1e_2+\omega_3^2(-e_1)\rangle$$

$$= -\omega^1\wedge\omega_3^2 + \omega^2\wedge\omega_3^1$$

$$= \omega_1^3\wedge\omega^2 + \omega^1\wedge\omega_2^3$$

$$= 2H\,\omega^1\wedge\omega^2$$ （回忆 $\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix}h_1^1 & h_2^1\\ h_1^2 & h_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$）

另外. $(r, dn, dn) = (r,\ \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2,\ \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$

$$= \langle r,\ \omega_3^1\wedge\omega_3^2\cdot n + \omega_3^2\wedge\omega_3^1(-n)\rangle$$

$$= +\langle r, n\rangle\left(\omega_3^1\wedge\omega_3^2 - \omega_3^2\wedge\omega_3^1\right)$$

$$= +\langle r, n\rangle\left(\omega_1^3\wedge\omega_2^3 + \omega_1^3\wedge\omega_2^3\right)$$

$$= +2\langle r, n\rangle\ \omega_1^3\wedge\omega_2^3$$

$$= +2\langle r, n\rangle\ \det\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\omega^1\wedge\omega^2$$

$$= +2\langle r, n\rangle\ K\,\omega^1\wedge\omega^2.$$

总结起来， $d(r, n, dn) = 2\left(H + \langle r, n\rangle K\right)\omega^1\wedge\omega^2.$

由 Stokes，即 $0 = \int_M d(r, n, dn) = 2\int_M \left(H + \langle r, n\rangle K\right)\omega^1\wedge\omega^2.$

$$\Rightarrow \int_M H\,dV = \int_M -\langle r, n\rangle K\,dV. \qquad \langle 1\rangle$$

定义. E^3 中光滑曲面 M 上的函数 $\varphi: M\to\mathbb{R}$

$$\varphi(p) := -\langle r(p), n(p)\rangle,\quad \forall p\in M$$

称为 M 的支撑函数。

支撑函数的绝对值是原点到 P 点切平面的距离。$\langle 1\rangle$ 可重新写成

$$\int_M H\,dV = \int_M K\varphi\,dV \qquad \langle 1\rangle'$$

类似地去考察整体定义的1形式 (r, n, dr)，

可得公式
$$\int_M dV = \int_M H\varphi\, dV. \qquad \langle 2\rangle$$

上述公式 $\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$ 称为 Minkowski 公式。

类似地论证还可以推出很多有趣的结论：对任一给定常向量 a，

考察整体定义的1形式 (r, dr, a), (r, n, a), (n, dn, a)

可分别推出
$$\int_M \langle n, a\rangle dV = 0, \quad \int_M H\langle n, a\rangle dV = 0, \quad \int_M K\langle n, a\rangle dV = 0$$

由 a 的任意性，知
$$\int_M n\, dV = 0, \quad \int_M Hn\, dV = 0, \quad \int_M Kn\, dV = 0.$$
向量值

积分公式在凸曲面的应用：

凸曲面的一个好处是，对其所包围的区域内任一点、都在曲面的同一侧。故将原点选在其包围区域内，可通过选取单位法向量使支撑函数 $\varphi > 0$（或 $\varphi < 0$）。

应用1. Liebmann 定理的新证明：

E^3 中 Gauss curvature 为常数的紧致连通曲面具有正常高斯曲率 $K > 0$.

注意到一个一般的事实：
$$H^2 = \left[\frac{1}{2}(k_1+k_2)\right]^2 = \left(\frac{1}{2}(k_1-k_2)\right)^2 + k_1k_2 = K + \frac{1}{4}(k_1-k_2)^2.$$

从而有 $H^2 \geq K$，"=" $\Leftrightarrow$ $k_1 = k_2$

注意到使 $\varphi>0$ 的选取单位法向量的选取恰好使 $H>0$.

故由积分公式得

$$\int_M K\varphi\, dV \overset{\langle 1\rangle}{=} \int_M H\, dV \geq \int_M \sqrt{K}\, dV = \sqrt{K}\int_M dV \overset{\langle 2\rangle}{=} \sqrt{K}\int_M H\varphi\, dV$$

$$\geq \sqrt{K}\int_M \sqrt{K}\varphi\, dV$$

$$= \int_M K\varphi\, dV$$

故不等号均为等号.

亦即 $H^2=K$ 处处成立。因而 M 为全脐点曲面.

故由 M 为紧致曲面知 M 为球面. □

应用2：257 11 推论的推广.

定理：设 M 为 E^3 中紧致凸曲面. 若 M 的平均曲率为常数，则 M 为球面.

证明：由 Minkowski 积分公式知

$$\int_M K\varphi\, dV \overset{\langle 1\rangle}{=} \int_M H\, dV = H\int_M dV \overset{\langle 2\rangle}{=} H\int_M H\varphi\, dV$$

$$\Rightarrow \int_M (H^2-K)\varphi\, dV = 0.$$

由凸性，可选适当的单位法向量，使 $\varphi>0$. 从而有

$$(H^2-K)\varphi \geq 0$$

这意味着 $H^2=K$，即 M 是全脐点曲面.

由紧致性，知 M 有一点 $K>0 \Rightarrow H\neq 0 \Rightarrow M$ 是球面. □

关于支撑函数的一个注记：

对于卵形面，知道了其支撑函数 $\varphi := -\langle r, n\rangle$，便可求出曲面本身，即求出各位置向量 r。
位置向量 法向量

由于卵形面 M 上的高斯映射 $g: M \to S^2$ 是 1:1 映射，曲面的位置向量也可看作 S^2 上的向量值函数

$$\begin{aligned} S^2 &\xrightarrow{g^{-1}} M \xrightarrow{r} E^3 \\ \xi &\longmapsto g^{-1}(\xi) \longmapsto r(g^{-1}(\xi)) \end{aligned}$$

而同时 n 可以看作是 S^2 的位置向量。从而支撑函数 φ 可以看作是 S^2 上的函数。

选取 S^2 上的一曲面片正交活动标架 $\{\xi; e_1, e_2, e_3\}$，其中 $e_3 = \xi$ 为法向量。其诸微分形式记为 $\theta^1, \theta^2, \theta_1^2, \theta_1^3, \theta_2^3$。作为 S^2 的函数 φ 求外微分有函数 $\varphi_1, \varphi_2: S^2 \to \mathbb{R}$ 使

$$d\varphi = \varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2.$$

另一方面，$d\varphi = d(-\langle r, n\rangle) = -\langle dr, n\rangle - \langle r, dn\rangle$

这里 n 看作 S^2 的位置向量，故 $\langle r, dn\rangle = \langle r, \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2\rangle$
$$= \langle r, e_1\rangle\theta^1 + \langle r, e_2\rangle\theta^2$$

这里 r 看作 S^2 上的向量值函数，$\langle dr, n\rangle = \langle d(r\circ g^{-1}), n\rangle$

其中 $d(r\circ g^{-1})(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} r\circ g^{-1}(c(t)) = dr((g^{-1})_*(v))$

为 M 上切向量的线性组合，故 $\langle dr, n\rangle = 0$.

综上，我们有 $\varphi_1\theta^1 + \varphi_2\theta^2 = -\langle r, e_1\rangle\theta^1 - \langle r, e_2\rangle\theta^2$

故 $\langle r, e_1\rangle = -\varphi_1$，$\langle r, e_2\rangle = -\varphi_2$

由此：$r = \langle r, e_1\rangle e_1 + \langle r, e_2\rangle e_2 + \langle r, e_3\rangle e_3 = -\varphi_1 e_1 - \varphi_2 e_2 - \varphi e_3$. □