卵形面的刚性：

Liebmann (1899) 的定理又可叙述为：给定两个 E^3 中常高斯曲率的紧致曲面 $M, \bar{M}$，若 $f: M \to \bar{M}$ 是一个等距对应，则 f 必为合同变换. 简言之，球面是 "not bendable".

Stefan Emmanuilovich Cohn-Vossen (1902 born, Breslau, Germany, now Wroclaw, Poland – 1936 died Moscow, Russia) 1927 年证明卵形面也是 "not bendable". (Cohn-Vossen 的另一个著名工作是研究完备非紧曲面的全曲率和欧拉示性数. 他还与 ~~Gauss~~ Hilbert 合著 "Geometry and Imagination".) 下面定理见：S. Cohn-Vossen, Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1927), 125–134.

定理 (Cohn-Vossen 1927) E^3 中两个等距的卵形面是合同的，即它们只差 E^3 中的一个合同变换，即一个刚体运动或反向刚体运动。

证明主思路套用"曲面论基本定理"唯一性部分的思路.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & \bar{M} \\
D \ni (u,v) \arrow[u, "r"] \arrow[ur, "\bar{r} := f \circ r"'] &
\end{tikzcd}
$$

设 f 为 M 到 $\bar{M}$ 的等距对应。取相应曲面片建立参数映射 $r = r(u,v)$ 和 $\bar{r} = \bar{r}(u,v) = f(r(u,v))$. 则相应的自然标架运动方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha \\[2mm]
\dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} n \\[2mm]
\dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta r_\beta
\end{cases}
\quad \text{及} \quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u^\alpha} = \overset{\text{切映射}}{f_*} r_\alpha \\[2mm]
\dfrac{\partial \bar{r}_\alpha}{\partial u^\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{r}_\gamma + \bar{b}_{\alpha\beta} \bar{n} \\[2mm]
\dfrac{\partial \bar{n}}{\partial u^\alpha} = -\bar{b}_\alpha^\beta \bar{r}_\beta .
\end{cases}
$$

若能证明各系数函数 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(u,v)$, $b_{\alpha\beta}(u,v)$, $b_{\alpha}^{\beta}(u,v)$

与 $\bar\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(u,v)$, $\bar b_{\alpha\beta}(u,v)$, $\bar b_{\alpha}^{\beta}(u,v)$ 分别相等，则上述两个

方程相同！为此只须检查相应第一、第二基本形式之系数相符即可.

这样的话两个一阶线性偏微分方程组之解的差异在于初值。

若此两标架差一刚体运动，需证 $\mathrm{I}(u,v)=\bar{\mathrm{I}}(u,v)$, $\mathrm{II}(u,v)=\bar{\mathrm{II}}(u,v)$
若差一反向刚体运动，需证 $\mathrm{I}(u,v)=\bar{\mathrm{I}}(u,v)$
$\mathrm{II}(u,v)=-\bar{\mathrm{II}}(u,v)$

在一点处 (u_0,v_0), $\left\{r(u_0,v_0), r_1(u_0,v_0), r_2(u_0,v_0), \dfrac{r_1\wedge r_2}{|r_1\wedge r_2|}(u_0,v_0)\right\}$

与 $\left\{\bar r(u_0,v_0), \bar r_1(u_0,v_0), \bar r_2(u_0,v_0), \dfrac{\bar r_1\wedge \bar r_2}{|\bar r_1\wedge \bar r_2|}(u_0,v_0)\right\}$ 之间差~~变换~~一个

这样初值经合同变换调同后，方程也相同

合同变换。又方程为线性方程，知两方程之解相差一个合同变换！

运动方程还可以用正交活动标架来表示. 取 M 相应曲面片上的正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$, $e_3 = e_1\wedge e_2$, 及 $\bar M$ 上相应标架 $\{\bar r; \bar e_1, \bar e_2, \bar e_3 := \bar e_1\wedge\bar e_2\}$, 其中 $\bar e_1 = f_* e_1$, $\bar e_2 = f_* e_2$. 则两组运动方程写为（与自然标架的形式等价）

$$\begin{cases} dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} d\bar r = \bar\omega^1 \bar e_1 + \bar\omega^2 \bar e_2 \\ d\bar e_1 = \bar\omega_1^2 \bar e_2 + \bar\omega_1^3 \bar e_3 \\ d\bar e_2 = \bar\omega_2^1 \bar e_1 + \bar\omega_2^3 \bar e_3 \\ d\bar e_3 = \bar\omega_3^1 \bar e_1 + \bar\omega_3^2 \bar e_2 . \end{cases}$$

粗糙地讲，通过映射 f, $\bar M$ 上之任一微分1形式 $\bar\omega$ 可以看作是 M 上之微分1-形式. 实际上，我们考虑 M 上 1形式 $f^*\bar\omega$

对任意 $v\in T_pM$, $p\in M$, $f^*\bar\omega(v) := \bar\omega(f_* v)$.

~~所以我们需要证明诸微分1形式在上述意义下相等即可~~。回忆 ω_1^2 完全由 ω^1, ω^2 决定，故只需比较

$$\begin{cases} \omega^1 \sim f^*\bar\omega^1, \quad \omega^2 \sim f^*\bar\omega^2 \\ \omega_1^3 \sim f^*\bar\omega_1^3, \quad \omega_2^3 \sim f^*\bar\omega_2^3 \end{cases}$$ 作为 M 上 1形式

根据定义：$f^*\bar\omega^\alpha(e_\beta) = \bar\omega^\alpha(f_* e_\beta) = \bar\omega^\alpha(\bar e_\beta) = \delta^\alpha_\beta$

故而 $\omega^1 = f^*\bar\omega^1$，$\omega^2 = f^*\bar\omega^2$.

这就是说为证 Cohn-Vossen 定理，只需证

$$\omega_1^3 = f^*\bar\omega_1^3, \quad \omega_2^3 = f^*\bar\omega_2^3 \text{ 若 } \det(f_*)>0 \quad (*)$$
$$\omega_1^3 = -f^*\bar\omega_1^3 \quad \omega_2^3 = -f^*\bar\omega_2^3 \text{ 若 } \det(f_*)<0.$$

若记 $\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\bar\omega_1^3\\ \bar\omega_2^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar h_{11} & \bar h_{12}\\ \bar h_{21} & \bar h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar\omega^1\\ \bar\omega^2\end{pmatrix}$ (※1)

我们有 $\begin{pmatrix}f^*\bar\omega_1^3\\ f^*\bar\omega_2^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar h_{11}\circ f & \bar h_{12}\circ f\\ \bar h_{21}\circ f & \bar h_{22}\circ f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f^*\bar\omega^1\\ f^*\bar\omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar h_{11}\circ f & \bar h_{12}\circ f\\ \bar h_{21}\circ f & \bar h_{22}\circ f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$ (※2)

这就是说，为证 (*)，只需证

$$h_{11} = \bar h_{11}\circ f, \quad h_{12} = \bar h_{12}\circ f, \quad h_{22} = \bar h_{22}\circ f \text{ 若 } \det(f_*)>0 \quad (**)$$
$$h_{11} = -\bar h_{11}\circ f \quad h_{12} = -\bar h_{12}\circ f, \quad h_{22} = -\bar h_{22}\circ f \text{ 若 } \det(f_*)<0.$$

为此目的，我们先建立如下线性代数引理。

引理：设 $\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \mu & \nu\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}\bar\lambda & \bar\mu\\ \bar\mu & \bar\nu\end{pmatrix}$ 为两个正定矩阵

满足 $\lambda\nu - \mu^2 = \bar\lambda\bar\nu - \bar\mu^2$. ⟨1⟩

则有 $\det\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu\\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix} \le 0$， ⟨2⟩

其中"="成立当且仅当 $\lambda=\bar\lambda$，$\mu=\bar\mu$，$\nu=\bar\nu$.

证明：设 A 为非奇异矩阵 使得

$$A\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu\\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix}A^T$$

为对角矩阵。(可取 A 为由 $\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu\\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix}$ 的特征向量给定).

记 $A\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \mu & \nu\end{pmatrix}A^T = \begin{pmatrix}\lambda^* & \mu^*\\ \mu^* & \nu^*\end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix}\bar\lambda & \bar\mu\\ \bar\mu & \bar\nu\end{pmatrix}A^T = \begin{pmatrix}\bar\lambda^* & \bar\mu^*\\ \bar\mu^* & \bar\nu^*\end{pmatrix}$.

则有 $\bar\mu^* = \mu^*$.

由<1>易知 $\det\begin{pmatrix}\lambda^* & \mu^* \\ \mu^* & \nu^*\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\bar\lambda^* & \bar\mu^* \\ \bar\mu^* & \bar\nu^*\end{pmatrix}$

故而 $\lambda^*\nu^* = \bar\lambda^*\bar\nu^*$. <3>

这时
$$\det\left[A\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu \\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix}A^T\right] = (\det A)^2\cdot\det\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu \\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix}\bar\lambda^*-\lambda^* & 0 \\ 0 & \bar\nu^*-\nu^*\end{pmatrix} = (\bar\lambda^*-\lambda^*)(\bar\nu^*-\nu^*) \quad <4>$$

由于 $\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ \mu & \nu\end{pmatrix}$ 正定知 $A\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ \mu & \nu\end{pmatrix}A^T$ 正定, 从而 $\lambda^*>0$, $\nu^*>0$

同理 $\bar\lambda^*>0$, $\bar\nu^*>0$.

将<3>代入<4>中有
$$(\det A)^2\cdot\det\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu \\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix} = (\bar\lambda^*-\lambda^*)\left(\frac{\lambda^*\nu^*}{\bar\lambda^*}-\nu^*\right)$$
$$= -\frac{\nu^*}{\bar\lambda^*}(\bar\lambda^*-\lambda^*)^2 \leq 0. \quad <5>$$

即有 $\det\begin{pmatrix}\bar\lambda-\lambda & \bar\mu-\mu \\ \bar\mu-\mu & \bar\nu-\nu\end{pmatrix} \leq 0$.

且<5>中等号成立当且仅当 $\bar\lambda^* = \lambda^*$。

由<3>及 $\bar\mu^* = \mu$ 知, $\bar\lambda^* = \lambda^* \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ \mu & \nu\end{pmatrix}A^T = A\begin{pmatrix}\bar\lambda & \bar\mu \\ \bar\mu & \bar\nu\end{pmatrix}A^T$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}\lambda & \mu \\ \mu & \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar\lambda & \bar\mu \\ \bar\mu & \bar\nu\end{pmatrix}. \quad \square$$

下面Cohn-Vossen定理的证明应用积分公式, 基本上属于Herglotz.

G. Herglotz, über die Starrheit der Eiflachen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 15(1943), 127-129.

Cohn-Vossen定理的证明:

$\det\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}$

回忆在证明积分公式 $\int_M H\,dv = \int_M K\varphi\,dv$ 时我们考查了整体

定义的微分1-形式 (r, n, dn)

在一个曲面片上的局部表示 $= (r,\ e_3,\ \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2)$

现在，我们考虑M上~~整~~曲面片上微分1-形式

$$\phi = (r,\ n,\ f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)$$

这里首先一个问题是，ϕ是否为M上"整体"定义的微分1-形式？

为此，需证ϕ的定义不依赖于标架的选取。易见r, n不依赖于标架选取，故只需证$f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2$不依赖于标架选取。

设M上另取正交标架$\{r;\ e_1',\ e_2',\ n\}$，其中

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

~~则~~注意：$\overline{M}$上标架选取通过f与M上的选取"联动"。

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1' \\ \overline{e}_2' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_*e_1' \\ f_*e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_*e_1 = \overline{e}_1 \\ f_*e_2 = \overline{e}_2 \end{pmatrix}$$

从而
$$\begin{pmatrix} \overline{\omega}_3^{1\,\prime} \\ \overline{\omega}_3^{2\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle dn, \overline{e}_1' \rangle \\ \langle dn, \overline{e}_2' \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\omega}_3^1 \\ \overline{\omega}_3^2 \end{pmatrix}$$

即有
$$\begin{pmatrix} f^*\overline{\omega}_3^{1\,\prime} \\ f^*\overline{\omega}_3^{2\,\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^*\overline{\omega}_3^1 \\ f^*\overline{\omega}_3^2 \end{pmatrix}$$

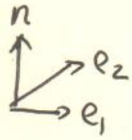
因此，
$$f^*\overline{\omega}_3^{1\,\prime} e_1' + f^*\overline{\omega}_3^{2\,\prime} e_2' = (f^*\overline{\omega}_3^{1\,\prime}\ \ f^*\overline{\omega}_3^{2\,\prime}) \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix}$$
$$= (f^*\overline{\omega}_3^1\ \ f^*\overline{\omega}_3^2) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{= Id} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$
$$= f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2.$$

这就证明了ϕ是M上整体定义的微分1-形式.

下面我们计算 $d\phi$：

$$d\phi = (dr,\ n,\ f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)$$
$$+ (r,\ dn,\ f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)$$
$$+ (r,\ n,\ d(f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)).$$
$$=: ① + ② + ③.$$

分别计算



$$① = (\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2,\ n,\ f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)$$
$$= \langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2,\ f^*\overline{\omega}_3^1 e_2 - f^*\overline{\omega}_3^2 e_1 \rangle$$
$$= -\omega^1 \wedge f^*\overline{\omega}_3^2 + \omega^2 \wedge f^*\overline{\omega}_3^1 .$$
$$= \omega^1 \wedge f^*\overline{\omega}_2^3 + f^*\overline{\omega}_1^3 \wedge \omega^2$$
$$\overset{㉓页}{\underset{(☆2)}{=}} \omega^1 \wedge (\overline{h}_{21}\circ f\,\omega^1 + \overline{h}_{22}\circ f\,\omega^2) + (\overline{h}_{11}\circ f\,\omega^1 + \overline{h}_{12}\circ f\,\omega^2) \wedge \omega^2$$
$$= 2\overline{H}\circ f\ \omega^1 \wedge \omega^2 ;$$

$$② = (r,\ \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2,\ f^*\overline{\omega}_3^1 e_1 + f^*\overline{\omega}_3^2 e_2)$$
$$= \langle r,\ \omega_3^1 \wedge f^*\overline{\omega}_3^2\, n - \omega_3^2 \wedge f^*\overline{\omega}_3^1\, n \rangle$$
$$= -\varphi\left(\omega_1^3 \wedge f^*\overline{\omega}_2^3 + f^*\overline{\omega}_1^3 \wedge \omega_2^3\right)$$
$$\overset{㉓页}{\underset{(☆1)(☆2)}{=}} -\varphi\left[\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \overline{h}_{21}\circ f & \overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \overline{h}_{11}\circ f & \overline{h}_{12}\circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\right] \omega^1 \wedge \omega^2 .$$

观察到行列式公式：

$$\det\begin{pmatrix} h_{11} - \overline{h}_{11}\circ f & h_{12} - \overline{h}_{12}\circ f \\ h_{21} - \overline{h}_{21}\circ f & h_{22} - \overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} \overset{\text{按第一行展开}}{=} \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} - \overline{h}_{21}\circ f & h_{22} - \overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -\overline{h}_{11}\circ f & -\overline{h}_{12}\circ f \\ h_{21} - \overline{h}_{21}\circ f & h_{22} - \overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{按第二行展开}}{=} \underbrace{\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}}_{=K} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ -\overline{h}_{21}\circ f & -\overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -\overline{h}_{11}\circ f & -\overline{h}_{12}\circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix} -\overline{h}_{11}\circ f & -\overline{h}_{12}\circ f \\ -\overline{h}_{21}\circ f & -\overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix}}_{=\overline{K}\circ f}$$

$$\overset{f\text{等距}}{=} 2K - \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \overline{h}_{21}\circ f & \overline{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \overline{h}_{11}\circ f & \overline{h}_{12}\circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} .$$

代回②中有：

$$② = \left[-2K\varphi + \varphi \det\begin{pmatrix} h_{11}-\bar{h}_{11}\circ f & h_{12}-\bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21}-\bar{h}_{21}\circ f & h_{22}-\bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix}\right]\omega^1\wedge\omega^2$$

最后，计算③.

首先，对 $\bar{M}$ 上任一微分1-形式 $\bar{\omega}$，我们有

$$d(f^*\bar{\omega}) = f^* d\bar{\omega}$$

实际上，回忆在一个曲面片 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 上，有

$$\begin{aligned} d(f^*\bar{\omega})(r_u, r_v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(f^*\bar{\omega}(r_v)\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(f^*\bar{\omega}(r_u)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\bar{\omega}(f_* r_v)\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\bar{\omega}(f_* r_u)\right) \\ &= d\bar{\omega}(f_* r_u, f_* r_v) \\ &= f^* d\bar{\omega}(r_u, r_v). \end{aligned}$$

(更细致讨论，见 [O'Neill, § 4.5])

$$\begin{aligned} ③ &= (r, n, de_1\wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + e_1 d f^*\bar{\omega}_3^1 + de_2\wedge f^*\bar{\omega}_3^2 + e_2 d f^*\bar{\omega}_3^2) \\ &= (r, n, (\omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3)\wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + e_1 f^*(\bar{\omega}_3^2\wedge\bar{\omega}_2^1) \\ &\qquad + (\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3)\wedge f^*\bar{\omega}_3^2 + e_2 f^*(\bar{\omega}_3^1\wedge\bar{\omega}_1^2)) \end{aligned}$$

注意到 $f^*(\bar{\omega}_3^2\wedge\bar{\omega}_2^1) = f^*\bar{\omega}_3^2\wedge f^*\bar{\omega}_2^1$，和 $f^*\bar{\omega}_2^1 = \omega_2^1$，我们

有 $$\begin{aligned} ③ &= (r, n, [\overbrace{\omega_1^2\wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + f^*\bar{\omega}_3^1\wedge f^*\bar{\omega}_1^2}^{=0}]e_2 + [\overbrace{f^*\bar{\omega}_3^2\wedge f^*\bar{\omega}_2^1 + \omega_2^1\wedge f^*\bar{\omega}_3^2}^{=0}]e_1 \\ &\qquad + [\omega_1^3\wedge f^*\bar{\omega}_3^1 + \omega_2^3\wedge f^*\bar{\omega}_3^2]e_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

综上，有 $$d\phi = \left[2\bar{H}\circ f - 2K\varphi + \varphi\det\begin{pmatrix} h_{11}-\bar{h}_{11}\circ f & h_{12}-\bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21}-\bar{h}_{21}\circ f & h_{22}-\bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix}\right]\omega^1\wedge\omega^2.$$

由Stokes公式知

$$0 = \int_M d\phi = 2\int_M \bar{H}\circ f\, dV - 2\int_M K\varphi\, dV + \int_M \varphi\det\begin{pmatrix} h_{11}-\bar{h}_{11}\circ f & h_{12}-\bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21}-\bar{h}_{21}\circ f & h_{22}-\bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} dV.$$

回忆我们有Gauss曲率>0. (25页) (28)补.

若 $\det(f_*)<0$，我们可设顶点Q M上单位法向 n 之选取使 $\varphi>0$.

(此时 $H>0$). 故 $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ 正定

但是 $\begin{pmatrix} \bar{h}_{11}\circ f & \bar{h}_{12}\circ f \\ \bar{h}_{21}\circ f & \bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix}$ 负定. $\Rightarrow$ $(-\bar{h}_{\alpha\beta}\circ f)$ 正定.

我们在(26)页②的计算时，同时观察到

$$\det\begin{pmatrix} h_{11}+\bar{h}_{11}\circ f & h_{12}+\bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21}+\bar{h}_{21}\circ f & h_{22}+\bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} = 2K + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \bar{h}_{21}\circ f & \bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \bar{h}_{11}\circ f & \bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

从而②也可表成

$$② = \left[+2K\varphi - \varphi\det\left(h_{\alpha\beta}+\bar{h}_{\alpha\beta}\circ f\right)\right]\omega^1\wedge\omega^2$$

从而Stokes公式推出 $0 = 2\int_M \bar{H}\circ f\,dV + 2\int_M H\,dV - \int_M \varphi\det(h_{\alpha\beta}+\bar{h}_{\alpha\beta}\circ f)\,dV$

即 $2\int_M (H+\bar{H}\circ f)\,dV = \int_M \varphi\det\left(h_{\alpha\beta}-(-\bar{h}_{\alpha\beta}\circ f)\right)dV.$

≤ 0 由引理. <A>

(注意此时有 $H>0$, $\bar{H}\circ f<0$)

我们仍维持M, $\bar{M}$ 上述顶点及法向量选取，对称的有

$$2\int_{\bar{M}}(H\circ f^{-1}+\bar{H})\,d\bar{V} = \int_{\bar{M}} \underset{<0}{\bar{\varphi}}\,\underbrace{\det(h_{\alpha\beta}\circ f^{-1}+\bar{h}_{\alpha\beta})}_{\leq 0}\,d\bar{V}$$

$\quad\Vert$

$2\int_{\bar{M}}(H+\bar{H}\circ f)\circ f^{-1}\,d\bar{V} \qquad \geq 0$ <B>

$\quad\Vert$

$2\int_M (H+\bar{H}\circ f)\,dV$

由(A)及(B)知，等号成立。由引理知 $h_{\alpha\beta} = -\bar{h}_{\alpha\beta}\circ f$. 得证.

□.

应用 Minkowski 积分公式，$\int_M K\varphi\, dV = \int_M H\, dV$，得

$$-2\int_M (\bar{H}\circ f - H)\, dV = \int_M \varphi \det\begin{pmatrix} h_{11}-\bar{h}_{11}\circ f & h_{12}-\bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21}-\bar{h}_{21}\circ f & h_{22}-\bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} dV$$

因为卵形面高斯曲率 >0，有 $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ 正定，先设 $\det(f_*)>0$，此时亦有 $\begin{pmatrix} \bar{h}_{11}\circ f & \bar{h}_{12}\circ f \\ \bar{h}_{21}\circ f & \bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix}$ 正定

可设 ~~M上去~~ 原点及 M 上单位法向 n 以选取使 $\varphi>0$. 此时 $H>0$ 则~~有~~由引理得

$$2\int_M (H-\bar{H}\circ f)\, dV \leq 0$$

同理可证 $2\int_{\bar{M}} (\bar{H}-H\circ f^{-1})\, d\bar{V} \leq 0$，即

$$2\int_{\bar{M}} (\bar{H}\circ f - H)\circ f^{-1}\, d\bar{V} = 2\int_M (\bar{H}\circ f - H)\, dV \leq 0.$$

故而有 $2\int_M (H-\bar{H}\circ f)\, dV = 0$. 因此有

$$\det\begin{pmatrix} h_{11}-\bar{h}_{11}\circ f & h_{12}-\bar{h}_{12}\circ f \\ h_{21}-\bar{h}_{21}\circ f & h_{22}-\bar{h}_{22}\circ f \end{pmatrix} = 0$$

由引理知 $h_{11}=\bar{h}_{11}\circ f$，$h_{12}=\bar{h}_{12}\circ f$，$h_{22}=\bar{h}_{22}\circ f$，得证. (28)补 □

卵形面之间存在等距对应意味着相应点处高斯曲率相等。回忆两个卵形面均通过各自 Gauss 映射 1:1 对应到单位球面。

$$M \xrightarrow{g} S^2 \xleftarrow{\bar{g}} \bar{M}$$

从而我们有 M 到 $\bar{M}$ 的 1:1 对应 $\bar{g}^{-1}\circ g : M \longrightarrow \bar{M}$. 这个 1:1 对应当然不能保证等距。但是下面我们证明，如果这个对应相应点处高斯曲率相等（这只是 $\bar{g}^{-1}\circ g$ 为等距对应的必要条件），则这个对应是一个平移！