

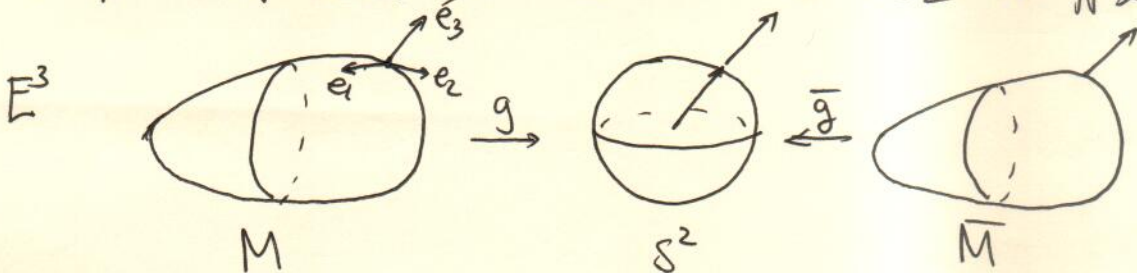
定理: 设  $M, \bar{M}$  为  $E^3$  中两个卵形面。若存在  $S^2$  上的正值函数  $K > 0$ , 使得  $M, \bar{M}$  的高斯曲率函数分别为  $K = K \circ g$  和  $\bar{K} = K \circ \bar{g}$

其中  $g: M \rightarrow S^2, \bar{g}: \bar{M} \rightarrow S^2$  为高斯映射。则  $M, \bar{M}$  相差一平移。

注记: 著名的 Minkowski 问题是一个卵形面是否由它作为法向量函数的高斯曲率 (唯一) 确定? 这<sup>是</sup>存在性问题: 给定  $S^2$  上正函数  $K: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , 是否存在  $E^3$  中卵形面, 使其高斯曲率函数为  $K \circ g$ ? 上述定理是说, 若这样的卵形面存在, 则<sup>是</sup>唯一。Minkowski 问题的解决要用到<sup>完全</sup>非线性 PDE 的理论。回忆卵形面可由其支撑函数  $g$  确定。求解 Minkowski 问题可化为  $g$  满足的一个 Monge-Ampère 型方程的解的存在性问题。这个问题由 Nirenberg, Pogorelov 解决。

1. L. Nirenberg, The Weyl and Minkowski Problems in Differential Geometry in the Large, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337-394.
2. A.V. Pogorelov, Regularity of a convex surface with given Gaussian curvature, Mat. Sb. 31 (1952), 88-103.

证明: 证明主要套路和上述 Cohn-Vossen 定理的证明类似。



在  $M$  的一个曲面上取正交活动标架  $\{r; e_1, e_2, e_3 = n\}$ 。



易见,  $\forall p \in M$ ,  $p$  点处,  $g(p)$  点处,  $g^{-1}(g(p))$  点处<sup>(257)</sup> 分别在

$M, S^2, \bar{M}$  上的单位法向量在  $E^3$  中平行 (相差一个平移)

将  $e_1, e_2$  平移至  $S^2, \bar{M}$  相应点处也得到  $S^2, \bar{M}$  上的正交活动标架. 三个曲面上在各自正交活动标架下微分 1-形式记作

$$M: \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^3, \omega_2^3$$

$$S^2: \theta^1, \theta^2, \theta_1^3, \theta_2^3$$

$$\bar{M}: \bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2, \bar{\omega}_1^3, \bar{\omega}_2^3, \bar{\omega}_3^3.$$

我们需在相应~~的~~对应下,  $M, \bar{M}$  的诸微分 1-形式相等. 从而标架的运动方程吻合, 且其初值相差一个平移, 得两卵形面只差一个平移.

更精确地, 我们需证:

$$\omega^1 = (g^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}^1, \quad \omega^2 = (g^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}^2 \quad (\text{作为 } M \text{ 上 1-形式})$$

$$\omega_1^3 = (g^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}_1^3, \quad \omega_2^3 = (g^{-1} \circ g)^* \bar{\omega}_2^3$$

等价地 (注意到  $(g^{-1} \circ g)^* = g^* \circ (g^{-1})^*$ ,  $(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*$ ),

$$(I) (g^{-1})^* \omega^1 = (g^{-1})^* \bar{\omega}^1, \quad (g^{-1})^* \omega^2 = (g^{-1})^* \bar{\omega}^2 \quad (\text{作为 } S^2 \text{ 上 1-形式})$$

$$(II) (g^{-1})^* \omega_1^3 = (g^{-1})^* \bar{\omega}_1^3, \quad (g^{-1})^* \omega_2^3 = (g^{-1})^* \bar{\omega}_2^3$$

注意到对  $S^2$  上任意光滑曲线  $c = c(t)$ , 有

$$\frac{d}{dt} e_3(c(t)) = \frac{d}{dt} e_3(g^{-1}(c(t))) \quad (\text{作为欧氏向量 (不随点动) 相加})$$

$$\text{从而 } \left\langle \frac{d}{dt} e_3(c(t)), e_\alpha(c(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} e_3(g^{-1}(c(t))), e_\alpha(g^{-1}(c(t))) \right\rangle, \alpha=1,2$$

(欧氏平行性)

这就是说  $\omega_3^\alpha((g^{-1})_* v) = \theta_3^\alpha(v), \quad \forall v \in T_p S^2, p \in S^2.$

$$\text{即 } (g^{-1})^* \omega_3^\alpha = \theta_3^\alpha, \quad \alpha=1,2$$

类似地有  $(g^{-1})^* \bar{\omega}_3^\alpha = \theta_3^\alpha$ . 故 (II) 得证.

所以,问题的关键是证 (I).

回到  $\mathbb{R}^2$  在  $M$  上有  $\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$ , 其中  $K = \det(h_{\alpha\beta}) > 0$ .

故存在  $(h_{\alpha\beta})$  的逆矩阵  $(\lambda_{\alpha\beta})$  使

$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix}.$$

~~这里  $(\lambda_{\alpha\beta})$  是对称正定矩阵.~~

由于  $K = \det(h_{\alpha\beta}) > 0$  我们可以适当选取法向量使  $(h_{\alpha\beta})$  正定, 从而  $(\lambda_{\alpha\beta})$  是对称正定矩阵。

进而在  $S^2$  上我们有

$$\begin{pmatrix} (g^{-1})^* \omega^1 \\ (g^{-1})^* \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \cdot g^{-1} \begin{pmatrix} (g^{-1})^* \omega_1^3 \\ (g^{-1})^* \omega_2^3 \end{pmatrix}. \quad \langle 1 \rangle$$

类似地我们有

$$\begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1})^* \omega^1 \\ (\bar{g}^{-1})^* \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{11} & \bar{\lambda}_{12} \\ \bar{\lambda}_{21} & \bar{\lambda}_{22} \end{pmatrix} \cdot \bar{g}^{-1} \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}_1^3 \\ (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}_2^3 \end{pmatrix}. \quad \langle 2 \rangle$$

由 (II), 为证 (I), 只须证  $S^2$  上的函数

$$\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}, \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2.$$

因为  $(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1}), (\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1})$  均正定, 我们的策略仍是应用引理.

也即去证  $\det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) = 0$ .

方法仍然是用积分公式.

考虑  $S^2$  上微分 1-形式  $\psi = (r \circ g^{-1}, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, dF \circ \bar{g}^{-1})$ , 其中  $r, \bar{r}$  分别为  $M, \bar{M}$  的位置向量. 这显然是  $S^2$  上整体定义的. 计算

$$\begin{aligned} d\psi &= (dr \circ g^{-1}, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, d(r \circ \bar{g}^{-1})) + (r \circ g^{-1}, d(\bar{r} \circ \bar{g}^{-1}), d(\bar{r} \circ \bar{g}^{-1})) \\ &= \textcircled{A} + \textcircled{B} \end{aligned}$$



其中由  $d(r \circ g^{-1})(v) = \frac{d}{dt} (r \circ g^{-1})(c(t)) = \frac{d}{dt} r(g^{-1}(c(t)))$   
 $= dr((g^{-1})_* v)$ ,  $\forall v \in T_p S^2, \forall p \in S^2$ .

于是  $d(r \circ g^{-1}) = (g^{-1})^*(dr) = (g^{-1})^*(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2)$   
 $= (g^{-1})^* \omega^1 e_1 + (g^{-1})^* \omega^2 e_2$  →  $e$  平移回  $S^2$  相点

类似地  $d(\bar{r} \circ \bar{g}^{-1}) = (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2$ .

故而  $\textcircled{A} = ((g^{-1})^* \omega^1 e_1 + (g^{-1})^* \omega^2 e_2, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2)$   
 $= (g^{-1})^* \omega^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 (e_1, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, e_2) + (g^{-1})^* \omega^2 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 (e_2, \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, e_1)$   
 $\quad \quad \quad = -\langle \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, n \rangle = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1}$   $\langle \bar{r} \circ \bar{g}^{-1}, n \rangle = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1}$   
 $= \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} ((g^{-1})^* \omega^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 - (g^{-1})^* \omega^2 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1)$

$\textcircled{3} \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle$   
 $= \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \left( \det \begin{pmatrix} \lambda_{11} \circ g^{-1} & \lambda_{12} \circ g^{-1} \\ \lambda_{21} \circ g^{-1} & \lambda_{22} \circ g^{-1} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_{11} \circ \bar{g}^{-1} & \bar{\lambda}_{12} \circ \bar{g}^{-1} \\ \bar{\lambda}_{21} \circ \bar{g}^{-1} & \bar{\lambda}_{22} \circ \bar{g}^{-1} \end{pmatrix} \right) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$   
 $\quad \quad \quad =: I$

因此  $\det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) = \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1}) + \det(-\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) =: I$   
 $= \frac{2}{K} =: I$

故  $\textcircled{A} = \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \left( \frac{2}{K} - \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \right) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$

进一步,  $\textcircled{B} = (r \circ g^{-1}, (g^{-1})^* \omega^1 e_1 + (g^{-1})^* \omega^2 e_2, (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 e_1 + (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 e_2)$   
 $= (g^{-1})^* \omega^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2 (r \circ g^{-1}, e_1, e_2) + (g^{-1})^* \omega^2 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^1 (r \circ g^{-1}, e_2, e_1)$   
 $\quad \quad \quad = -2 \varphi \circ g^{-1} (g^{-1})^* \omega^1 \wedge (\bar{g}^{-1})^* \bar{\omega}^2$

$\textcircled{3} \langle 2 \rangle$   
 $= -2 \varphi \circ g^{-1} \det(\bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 = -\frac{2\varphi \circ g^{-1}}{K} \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$

综上,  $d\psi = \left\{ \frac{2}{K} (\bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} - \varphi \circ g^{-1}) - \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \right\} \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$

由 Stokes 知,  $0 = \int_{S^2} d\psi = \int_{S^2} \frac{2}{K} (\bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} - \varphi \circ g^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 - \int_{S^2} \bar{\varphi} \circ \bar{g}^{-1} \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3$ .

$$\begin{aligned} \text{即. } & \int_{S^2} \frac{2}{k} (\bar{\varphi} \bar{g}^{-1} \varphi) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 \\ & = \int_{S^2} \bar{\varphi} \bar{g}^{-1} \det(\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} - \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3. \end{aligned}$$

由选原点在卵形面内, 由前述法向量的取, 知  $\bar{\varphi} > 0, \varphi > 0$ .

~~$\theta_1^3 \wedge \theta_2^3 = \det(h_{\alpha\beta}) \theta^1 \wedge \theta^2$~~

由引理.  $\int_{S^2} \frac{2}{k} (\bar{\varphi} \bar{g}^{-1} - \varphi \circ g^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 \leq 0$

由对称性可得  $\int_{S^2} \frac{2}{k} (\varphi \circ g^{-1} - \bar{\varphi} \bar{g}^{-1}) \theta_1^3 \wedge \theta_2^3 \leq 0$

故 "=" 成立, 由引理知

$$\lambda_{\alpha\beta} \circ g^{-1} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \bar{g}^{-1}.$$

即  $\lambda_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \bar{g}^{-1} \circ g = \bar{\lambda}_{\alpha\beta} \circ (\bar{g}^{-1} \circ g)$ , 得证.  $\square$

Hilbert 定理:

由 Liebmann (1899) 定理  $E^3$  中任一紧致(连通)常高斯曲率曲面必为球面, 也即常正高斯曲率曲面。特别地, 不存在紧致常零高斯曲率或常负高斯曲率曲面。

若把考虑曲面范围由“紧致”曲面扩大为“完备”曲面, 即作为度量空间完备, 则平面(或更一般地,  $E^3$  中)为完备常零高斯曲率曲面。但是对于常负高斯曲率完备曲面, D. Hilbert (1901) 证明了如下定理:

定理 (Hilbert, 1901) 在  $E^3$  中不存在常负高斯曲率的完备光滑曲面。

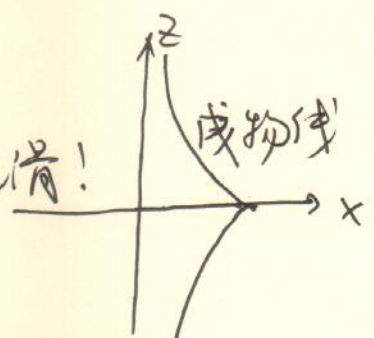
这个结果给出了局部(local)和大范围(global)几何的另一种区别:



$E^3$ 中常负高斯曲率的曲面片有很多, 但是不完备 (infinitely extendable)

以常负高斯曲率光滑曲面却不存在!

圆形的球面在  $x, y$  平面上的曲线上的点均不完备!



Hilbert 的定理发表在

D. Hilbert, über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung, Trans. Amer. Math. Soc. 2(1901), 87-99.

不久 E. Holmgren 便发表了一个不同的证明:

E. Holmgren, Sur les surfaces à courbure constante negative, C. R. Acad. Sci., Paris 134 (1902, 740-743).

我们这里给出的证明大体上是 Holmgren 的证明。在正式开始讨论之前, 我们先讨论完备曲面的概念。

① 完备曲面: 设  $M$  为  $E^3$  中的光滑曲面。设  $P, Q \in M$  为任意两点, 则定义它们之间的距离为

$$d(P, Q) = \inf_{\gamma} l(\gamma)$$

其中  $\gamma$  为连接  $P, Q$  两点的分段光滑曲线,  $l(\gamma)$  为曲线  $\gamma$  的长度。

我们有如下观察:

引理 1:  $E^3$  中光滑曲面<sup>连通</sup> $M$  上任两点, 都可由曲面上的分段光滑曲线相连接。

证明: "连通"性意味着  $M$  的开且闭非常集为全集  $M$ 。

对任意  $P \in M$ , 由于  $M$  的每点都包含在某一曲面片内, 知

集合  $A = \{Q \in M \mid \text{存在曲面上分段光滑曲线连接 } P, Q\}$  为开集,

同理, 其补集

(257) (33)

$M \setminus A_p = \{Q \in M \mid \text{不存在曲面上分段光滑曲线连接 } P, Q\}$  也为开集

又若  $Q$  和  $P$  属于同一曲面片, 则必有光滑曲线相连, 知  $A_p$  为非空.  
由连通性, 知  $A_p = M$ . □

这个引理保证了  $d(P, Q) < \infty$ . 下面我们说明  $d$  确为一个度量:

引理 2. 距离函数  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  满足

(i)  $d(P, Q) = d(Q, P)$

(ii)  $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$

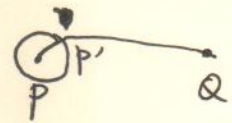
(iii)  $d(P, Q) \geq 0$  且  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ .

证明: (i), (ii) 由定义直接推得. 对 (iii) 只需证若  $P \neq Q$ , 则  $d(P, Q) > 0$ .

事实上, 存在充分小  $\varepsilon > 0$  s.t.  $B(P, \varepsilon)$ , 其中

$B(P, \varepsilon)$  是以  $P$  为心,  $\varepsilon$  为半径的(开)地球.

(这由欧氏开区域的 Hausdorff 可分性知).



设  $\gamma$  是连接  $P, Q$  的分段光滑曲线, 且 ~~且~~

$(\gamma(0) = P, \gamma(l) = Q)$

$\subseteq t = \inf \{ t \in (0, l) : \gamma(t) \notin B_P(\varepsilon) \}$

则有  $l(\gamma) \geq l(\gamma|_{[0, t]}) \geq d(P, P') = \varepsilon > 0$ , 故而  $d(P, Q) \geq \varepsilon > 0$ . □

定义:  $E^3$  中光滑曲面  $M$  称为是完备的, 若  $(M, d)$  作为度量空间完备, 即关于  $d$  的 Cauchy 列收敛.

性质: 如果曲面  $M$  是  $E^3$  中子集为闭集, 则  $M$  是完备的.

证明: 是也,  $\forall P, Q \in M$ ,

$d_{\text{Euclidean}}(P, Q) \leq d_M(P, Q)$



故  $\{P_n\}$  是  $M$  上关于  $d_M$  的 Cauchy 列 可推出  $\{P_n\}$  是  $E^3$  中关于  $d_{\text{Euclidean}}$  的 Cauchy 列。由  $E^3$  的完备性知, 存在极限点  $P_0$  s.t.  $P_n \rightarrow P_0$  as  $n \rightarrow \infty$ . 由于  $M$  是闭集,  $P_0 \in M$ .

要说明  $d_M(P_n, P_0) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . ~~需证当  $d_E(P_n, P_0)$  充分小时, 说明  $d_M$  定义的  $M$  的拓扑与曲面  $M$  作为  $E^3$  子集的子空间拓扑一致。实际上,  $d_M$  定义的  $M$  的拓扑的拓扑基可取为以点  $P$  为中心,  $r$  为半径的距高球  $B_{d_M}(P, r) = \{Q \in M : d(Q, P) < r\}$ ,  $\forall P \in M, \forall r$ . 根据测地坐标系之讨论知, 当  $r$  充分小时, 距高球  $B_{d_M}(P, r)$  与以  $P$  为心,  $r$  为半径的测地球  $B_P(r)$  相等, 故两种拓扑一致。注意后者又与  $E^3$  的子空间拓扑一致。~~

□.  
局部.

② 常负高斯曲率曲面上 参数曲线为渐近线的 Chebyshev 网的存在性

我们要证明如下引理: 局部渐近 Chebyshev 网的存在性

引理 1: 设  $M$  为  $E^3$  中高斯曲率为  $K \equiv -1$  的光滑曲面. 对任意  $P \in M$ , 存在曲面片:

$$r = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M.$$

$$r(0, 0) = P$$

其参数曲线均为弧长参数的渐近线.

注记 1: 由  $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ , 知若对曲面作相似变换  $(r \mapsto cr)$

则有  $K \mapsto \frac{c^2}{c^4} K = \frac{1}{c^2} K$ . 故而我们为简便起见设  $K \equiv -1$ .

注记 2: 我们称曲面片  $r: (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$  的参数化为一个 Chebyshev 网, 如果所有参数曲线都是弧长参数化的.



(即有  $|r_u| = |r_v| = 1$ ) . 如把  $(a, b) \times (c, d)$  看作一片织布, (257) (37)

则  $r: (a, b) \times (c, d) \rightarrow M$  为 Chebyshev 网即是指它没有拉伸或收缩任何纤维. 我们称  $r$  为一个渐近 Chebyshev 网 (asymptotic Chebyshev net) 如果一个 Chebyshev 网的每一条参数曲线均为渐近直线.

引理 3 的证明:

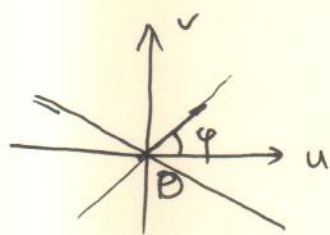
回忆  $K < 0$  点处的渐近方向:

在一点处切平面内, 设  $u$  轴,  $v$  轴为主

方向, 则渐近方向由  $k_1 u^2 + k_2 v^2 = 0$  定义. 也即

$$v = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} u.$$

设  $k_1 \geq k_2$ , 则  $K = -1 \Rightarrow k_1 > 0, k_1 k_2 = -1 \Rightarrow k_2 < 0 \Rightarrow v = \pm \sqrt{k_1^2} u = \pm k_1 u$ .



注意  $K = -1$  意味着曲面无脐点, 因而在  $P \in M$  附近可取曲率线

参数化:  $r = r(u, v)$ , 即  $r_u, r_v$  均为主方向.

从而取  $e_1 = \frac{r_u}{|r_u|}$ ,  $e_2 = \frac{r_v}{|r_v|}$ ,  $e_3 = e_1 \wedge e_2$  为正则活动标架.

从而有  $\omega^1 = \sqrt{E} du$ ,  $\omega^2 = \sqrt{G} dv$

$$\text{进而 } \begin{cases} d\omega^1 = -(\sqrt{E})_v du \wedge dv = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

这意味着

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}} \omega^1 + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}} \omega^2 \\ &= -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv. \end{aligned}$$

另外,  $\omega_1^3 = k_1 \omega^1$ ,  $\omega_2^3 = k_2 \omega^2$

(257) (38)

利用以上信息考查 Codazzi 方程

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 & \langle 1 \rangle \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 & \langle 2 \rangle \end{cases}$$

以  $\langle 1 \rangle$  为例, 右端 =  $\omega_1^2 \wedge k_2 \omega^2 = k_2 \omega_1^2 \wedge \omega^2$

左端 =  $d(k_1 \omega^1) = d(k_1 \sqrt{E} du) = (k_1 \sqrt{E})_v dv \wedge du$

$$\begin{aligned} \text{故而 } -(k_1 \sqrt{E})_v du \wedge dv &= k_2 \left( -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right) du \wedge (\sqrt{G} du) \\ &= -k_2 (\sqrt{E})_v du \wedge du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (k_1 \sqrt{E})_v - k_2 (\sqrt{E})_v = 0$$

$$\text{即 } (k_1)_v \sqrt{E} + (k_1 - k_2) (\sqrt{E})_v = 0 \quad \langle 3 \rangle$$

类似地, 从  $\langle 2 \rangle$  可推出

$$(k_2)_u \sqrt{G} - (k_1 - k_2) (\sqrt{G})_u = 0 \quad \langle 4 \rangle$$

由一开始的分析知, 设  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$  为渐近方向和主方向  $e_1 = \frac{r_u}{|r_u|}$  的

夹角, 则有  $k_1 = \tan \varphi$ ,  $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\cot \varphi$ .

$$\begin{aligned} \langle 3 \rangle \Rightarrow 0 &= \frac{\varphi_v}{\cos^2 \varphi} \sqrt{E} + \frac{(\sqrt{E})_v}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\varphi_v \sin \varphi \sqrt{E} + (\sqrt{E})_v \cos \varphi}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{\sqrt{E}}{\cos \varphi} \right)_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 4 \rangle \Rightarrow 0 &= \frac{\varphi_u}{\sin^2 \varphi} \sqrt{G} - \frac{(\sqrt{G})_u}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{\varphi_u \cos \varphi \sqrt{G} - (\sqrt{G})_u \sin \varphi}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \\ &= -\frac{1}{\cos \varphi} \left( \frac{\sqrt{G}}{\sin \varphi} \right)_u \end{aligned}$$



即  $\left(\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}\right)_v = 0, \left(\frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi}\right)_u = 0.$

因此  $\begin{cases} dz = \frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi} du \\ d\eta = \frac{\sqrt{G}}{\sin\varphi} dv \end{cases}$  有解 (因为  $d^2z=0, d^2\eta=0$  成立)

又因为  $\frac{\sqrt{E}}{\cos\varphi}(u,v)$  与  $v$  无关, 知  $z = z(u).$

类似地  $\eta = \eta(v),$  即  $z, \eta$  给出原参数曲线之重新参数化.

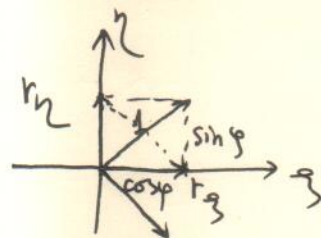
特别地,  $z$ -线,  $\eta$ -线仍为曲线.  $r = r(u,v) = r(z,\eta)$

注意, 此时有  $\begin{cases} \omega^1 = \sqrt{E} du = \cos\varphi dz \\ \omega^2 = \sqrt{G} dv = \sin\varphi d\eta \end{cases}$

因此  $r_z = |r_z| e_1$  且  $\omega^1(r_z) = \cos\varphi = \omega^1(|r_z| e_1) = |r_z|.$

即  $|r_z| = \cos\varphi$

类似  $|r_\eta| = \sin\varphi.$



易见  $r_z + r_\eta$  为渐近方向, 且模长为 1.

另  $r_z - r_\eta$  为另一渐近方向, 模长也为 1

因此, 若我们再做参数变换  $\begin{cases} z = s + t \\ \eta = s - t \end{cases}$

则有  $r = r(u,v) = r(z,\eta) = r(s,t),$

$\begin{cases} r_s = r_z \cdot \frac{\partial z}{\partial s} + r_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial s} = r_z + r_\eta \\ r_t = r_z \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + r_\eta \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = r_z - r_\eta \end{cases}$

为该点处的渐近方向, 且参数曲线  $s$ -线,  $t$ -线均为弧长参数.