

③ 渐近方向夹角和 Sine-Gordon 方程.

引理4: 设 M 为 E^3 中高斯曲率 $K \equiv -1$ 的连通曲面.

$r: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ 为渐近 Chebyshev 网.

令 $\alpha(s_0, t_0)$ 为 $(0, \pi)$ 中唯一的 $r_s(s_0, t_0)$ 和 $r_t(s_0, t_0)$ 的夹角
则 α 满足 Sine-Gordon 方程

$$\alpha_{st} = \sin \alpha.$$

证明: 由前述分析, 易见 $\alpha = 2\varphi$. 在引理3证明中考虑参数化 $r = r(\xi, \eta)$. 考查高斯方程

$$K = \frac{-dw_1^2}{w^1 \wedge w^2}.$$

回忆 $w^1 = \cos\varphi d\xi, w^2 = \sin\varphi d\eta$

$$\begin{cases} dw^1 = -\sin\varphi \cdot \varphi_\eta \cdot d\eta \wedge d\xi = \frac{\sin\varphi \cdot \varphi_\eta}{\sin\varphi \cos\varphi} w^1 \wedge w^2 \\ dw^2 = \cos\varphi \cdot \varphi_\xi \cdot d\xi \wedge d\eta = \frac{\cos\varphi \cdot \varphi_\xi}{\sin\varphi \cos\varphi} w^1 \wedge w^2 \end{cases}$$

进而 $w_1^2 = \frac{\varphi_\eta}{\cos\varphi} w^1 + \frac{\varphi_\xi}{\sin\varphi} w^2 = \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta$

此外还有 $dw_1^2 = \varphi_{\eta\eta} d\eta \wedge d\xi + \varphi_{\xi\xi} d\xi \wedge d\eta$
 $= (\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta}) d\xi \wedge d\eta$

代入高斯方程有 $-1 \equiv K = \frac{-(\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta}) d\xi \wedge d\eta}{\sin\varphi \cos\varphi d\xi \wedge d\eta}$

$\Rightarrow \varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta} = \sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi).$

即 $\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} = \sin\alpha$, 回忆 $\begin{cases} \xi = s+t \\ \eta = s-t \end{cases}$

由 $\alpha_{st} = (\alpha_\xi + \alpha_\eta)_t = \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\xi\eta} + \alpha_{\eta\xi} - \alpha_{\eta\eta} = \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta}$ 得证. \square

the sine-Gordon 方程来源: 物理上著名的 Klein-Gordon 方程: $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0$

实际上, 知道了 Sine-Gordon 方程的一个解, 就能得到一个常负曲率的曲面片: 这是因为第一、第二基本形式可表示为

$$I = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2, \quad II = \omega^1 \otimes \omega^3 + \omega^2 \otimes \omega^3$$

其中 $\omega^1 = \cos \varphi d\xi$, $\omega^2 = \sin \varphi d\eta$.

由结构方程 $\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \end{cases}$ 解出 $\omega^3 = \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta$ (*)

~~故这组结构方程~~

又有 $\begin{cases} \omega_1^3 = k_1 \omega^1 = \tan \varphi \cdot \cos \varphi d\xi = \sin \varphi d\xi \\ \omega_2^3 = k_2 \omega^2 = -\cot \varphi \cdot \sin \varphi d\eta = -\cos \varphi d\eta \end{cases}$ (**)

从而有 $I = \cos^2 \varphi d\xi \otimes d\xi + \sin^2 \varphi d\eta \otimes d\eta$. (*)
 $II = \frac{1}{2} \sinh 2\varphi (d\xi \otimes d\xi - d\eta \otimes d\eta)$

注意到 $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

故给定 Sine-Gordon 方程的一个解 α , 则由 (*) 确定第一、第二基本形式. 要确定曲面片, 由曲面论基本定理, 只需验证结构方程均满足. 由 (**) 知, 这组结构方程 $\begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega^3 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 \end{cases}$ 自然满足.

另外, Sine-Gordon 方程由 Gauss 方程解出, 故 Gauss 方程

$$d\omega_1^3 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^3$$

也自然满足. 最后由 (**) 可直接检查 Codazzi 方程

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{cases}$$

亦成立。□

小结	$\begin{cases} \omega^1 = \cos \varphi d\xi \\ \omega^2 = \sin \varphi d\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^3 = \varphi_\eta d\xi + \varphi_\xi d\eta \\ \omega_2^3 = k_1 \omega^1 = \sin \varphi d\xi \\ \omega_3^3 = k_2 \omega^2 = -\cos \varphi d\eta \end{cases}$
Codazzi 方程自然满足	
Gauss 方程要求	$\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} = \sinh \alpha$

在渐近 Chebyshev 网条件下, 第一、第二基本形式可写为如下形式.

由参数变换 $\begin{cases} \xi = s+t \\ \eta = s-t \end{cases}$

知 $d\xi = ds + dt, d\eta = ds - dt$ (257) (42)

代入 (4), 得

$$I = \cancel{\cos^2} ds \otimes ds + \cos 2 (ds \otimes dt + dt \otimes ds) + dt \otimes dt.$$

$$II = \sin 2 (ds \otimes dt + dt \otimes ds).$$

(4) 在 E^3 中常负高斯曲率完备曲面 M 上存在渐近 Chebyshev 网 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.

~~证~~: 我们的目标是证明从整个平面 \mathbb{R}^2 到 M 的映射

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M: (s, t) \mapsto f(s, t). \text{ 使得}$$

• $s \mapsto f(s, t), s \in \mathbb{R}$ 为渐近线, \forall 给定 $t_0 \in \mathbb{R}$.

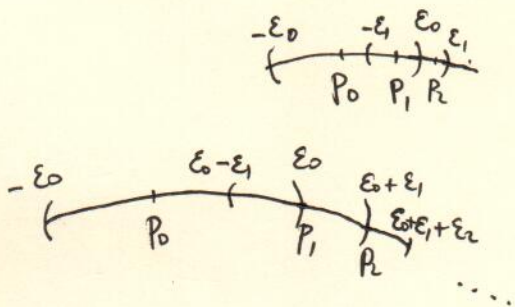
• $t \mapsto f(s_0, t), t \in \mathbb{R}$ 为渐近线, \forall 给定 $s_0 \in \mathbb{R}$.

我们的构造如下:

(i) 对任一点 $P_0 \in M$, 和该点的一个渐近方向 $v \in T_{P_0}M$, 由前述局部渐近 Chebyshev 网的存在性 (引理 3), 知存在唯一的一条弧长参数渐近线 $c(s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 使得

$$c(0) = P_0, \quad c'(0) = v.$$

(ii) 由 M 的完备性, 知道 c 可以定义在整个 \mathbb{R} 上, 即 c 可以无限延长! 实际上, c 总是可以延长:



但是 ε_i 依赖于 P_i , 如果 ε_i 变得越来越小, $\varepsilon_i \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$, 则 P_i 为 Cauchy 列. 这时, 纵使可以无限次'延长', 但曲线不会通过 P_i 的极限点!

若~~曲面不完备~~，此极限点不在曲面上，即曲面不完备，则此渐近线只能定义在 $(0, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i)$ (257) (43)

但若曲面完备，则可以用此极限点周围的局部渐近 Chebyshev 网以该极限点开始，再延长某个正数 $\varepsilon > 0$ ，从而可以“越过”该点，继续延长。

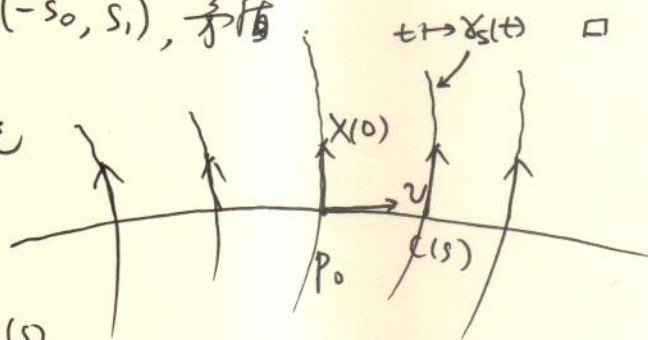
(ii) 精确地，若 c 只能定义在 $(-s_0, s_1)$ 上，记

$$P_0 = \lim_{s \rightarrow -s_0} c(s) \in M, \quad P_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} c(s) \in M. \quad (s \text{ 是弧长参数, } \Rightarrow)$$

则利用 P_0, P_1 处的局部渐近 Chebyshev 网 $d(c(s), c(s')) \leq |s' - s|$ 即可让 c 的定义超出区间 $(-s_0, s_1)$ ，矛盾。

(iii) 令 $X(0)$ 为 P_0 处与 v 线性无关的单位渐近方向。

更一般地， $X(s)$ 为 $c(s)$ 处与 $c'(s)$ 线性无关的单位渐近方向。



定义映射 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ 如下。

$$(s, t) \mapsto f(s, t) = \text{过 } c(s) \text{ 点, 与渐近方向 } X(s) \text{ 相切的渐近线 } \gamma_s(t) \text{ 在 } t \text{ 处取值.}$$

单位
弧长参数

(iv) 为说明上述构造的 f 即为所求，需说明对任一给定 $t \in \mathbb{R}$ ，曲线 $s \mapsto f(s, t)$ 是以 s 为弧长参数的渐近线！

只需证，对任意 (s_0, t_0) ，曲线 $s \mapsto f(s, t_0)$ 在 $|s - s_0|$ 足够小时是弧长参数的渐近线。

注意此时， $\{f(s_0, t) : 0 \leq t \leq t_0\}$ 有限致，故存在有限多个局部 Chebyshev 网覆盖它。： $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

我可假设上述排列使 r_i, r_{i+1} 相交.

设 r_i 覆盖 $C(s_0)$ 点.

注意 $C(s)$ 是弧长参数

渐近线.

因此不妨可设 $r_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$.

$$r_i(s, 0) = C(s) = f(s, 0) \quad \text{对 } |s - s_0| \text{ 充分小 } s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$$

设曲面 M 上两个线性无关单位渐近方向向量场为 v_1, v_2 . 使

$$v_1(C(s)) = \dot{C}(s), \quad v_2(C(s)) = X(s).$$

由定义 ~~$f(s, t) = \gamma_s(t) = f(s, 0) + \int_0^t v_2 dt$~~

$$r_i(s, t) = \gamma_s(t) = f(s, t).$$

故 对 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 有 $s \mapsto f(s, t), s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 为弧长参数渐近线.

由上述论证可 ~~用迭代推进~~ 最终证明 $s \mapsto f(s, t)$ 在 $|s - s_0|$ 充分小时为弧长参数渐近线.

实际上, 这儿的根本原理是: 对 r_i , 若存在一个 t_0 , 使得

$$f(s, t_0) = r_i(s, t_0) \quad |s - s_0| \text{ 充分小在 } r_i \text{ 定义范围内.}$$

则有 $f(s, t) = r_i(s, t)$ 对任意 t 在 r_i 定义范围内. \square

上述构造说明: 单角函数 α 在整个 \mathbb{R}^2 上有定义且满足

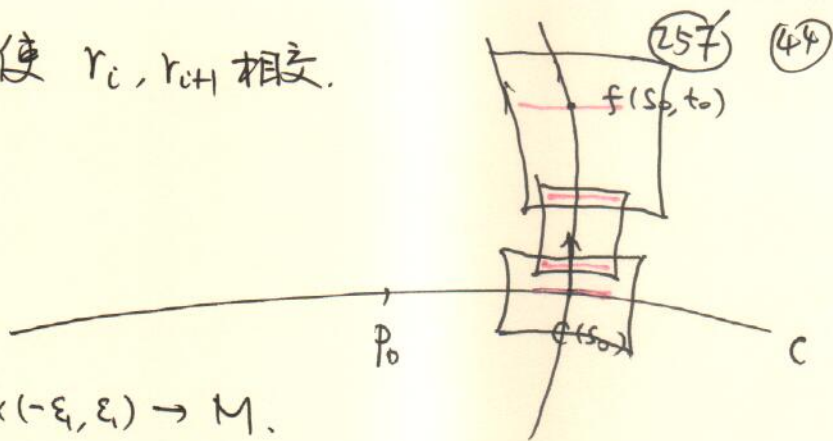
$$\text{Sine-Gordon 方程. } \alpha_{st} = \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

下面来到 Hilbert 定理证明的最后一步:

⑤. 不存在函数 $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$\alpha_{st} = \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi.$$

证明: 反证法. 假设存在这样的函数 α . 则我们注意到 α 有界.



若可说明,在一无界区域上, $\sin \alpha$ 有正下界, 则积分

(257) (49)

Sine-Gordon 方程会得到一个 有界量 \geq 无界量 的矛盾.

首先, 我们看到 $\sin \alpha > 0, 0 < \alpha < \pi$. 我们需要在一个小一些的无界区域上得到一个正的下界.

" $\sin \alpha > 0$ " 已然说明函数 $t \mapsto \alpha_s(t)$, $t \in \mathbb{R}$ 是严格单增函数. 故特别地, α_s 不恒为 0.

不失一般性, 可设 $\alpha_s(0,0) \neq 0$. 又观察到 $(s,t) \mapsto \alpha(-s,-t)$

仍然满足 Sine-Gordon 方程. 故亦可设

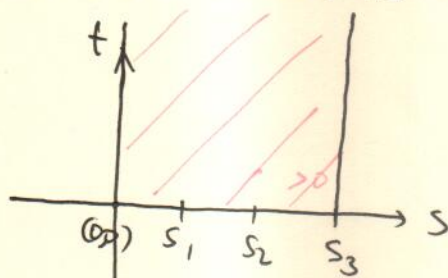
$$\alpha_s(0,0) > 0.$$

由光滑性, $\exists s_3 > 0$ s.t. $\alpha_s(s,0)$ 在 $s \in [0, s_3]$ 上严格大于 0!

又由 α_s 关于 t 的严格单增性,

知 α_s 在 $[0, s_3] \times [0, \infty)$ 上

严格正!



$\alpha_s(s,0)$ 在 $s \in [0, s_3]$ 上严格大于 0 说明 $s \mapsto \alpha(s,0), s \in [0, s_3]$ 是严格单增函数. 所以在稍小区间 $[s_1, s_2]$, $0 < s_1 < s_2 < s_3$ 上,

有 $\alpha(s,t) \in [\alpha(s_1,0), \alpha(s_2,0)], s \in [s_1, s_2]$

而 $\alpha(s_1,0) - \alpha(0,0) > 0, \alpha(s_3,0) - \alpha(s_2,0) > 0$.

记 $\delta = \min \{ \alpha(s_1,0) - \alpha(0,0), \alpha(s_3,0) - \alpha(s_2,0) \} > 0$.

~~故~~ 故 $\alpha(s_1,0) \geq \delta + \alpha(0,0) \geq \delta$

$$\alpha(s_2,0) \leq \alpha(s_3,0) - \delta \leq \pi - \delta$$

即 $\alpha(s,0) \in [\delta, \pi - \delta], s \in [s_1, s_2]$. (*)

这时注意到 (*) 对任意 t 都对. 这是因为 α_s 关于 t 严格单增, 有

$$\alpha(s_1,t) - \alpha(0,t) = \int_0^{s_1} \alpha_s(t) ds \geq \int_0^{s_1} \alpha_s(0) ds = \alpha(s_1,0) - \alpha(0,0)$$

$$\alpha(S_3, t) - \alpha(S_2, t) = \int_{S_2}^{S_3} \alpha_s(t) ds \geq \int_{S_2}^{S_3} \alpha_s(0) ds = \alpha(S_3, 0) - \alpha(S_2, 0)$$

故 $\forall t \geq 0$, 有

$$\alpha(S_1, t) \geq \alpha(0, t) + \delta \geq \delta$$

$$\alpha(S_2, t) \leq \alpha(S_3, t) - \delta \leq \pi - \delta$$

$\Rightarrow \alpha(S, t) \in [\alpha(S_1, t), \alpha(S_2, t)] \subseteq [\delta, \pi - \delta], \forall t \geq 0, S \in [S_1, S_2]$.

也就有 $\sin \alpha \geq \sin \delta > 0$.

$$\sin \alpha \geq \sin \delta > 0.$$

这时我们在区域 $[S_1, S_2] \times [0, T]$ 上积分 Sine-Gordon 方程, 有

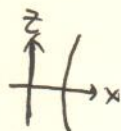
$$\int_0^T \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s \partial t} ds dt = \int_0^T \int_{S_1}^{S_2} \sin \alpha(s, t) ds dt \geq \sin \delta \cdot T(S_2 - S_1)$$

而左端 = $\int_0^T (\alpha_t(S_2, t) - \alpha_t(S_1, t)) dt$

$$= \alpha(S_2, T) - \alpha(S_2, 0) - \alpha(S_1, T) + \alpha(S_1, 0)$$

$$= \alpha(S_2, T) - \alpha(S_1, T) - [\alpha(S_2, 0) - \alpha(S_1, 0)]$$

$< \pi$ 有界



但在端 $\rightarrow \infty$ as $T \rightarrow \infty$.

故矛盾。得证。

例子: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 是双曲面
 $(f(u), g(u)) = (u, \sqrt{u^2+1})$
 $\Rightarrow k = \frac{(f'g'' - f''g')g'}{(f')^2 + (g')^2} = -\frac{1}{(u^2+1)^2} \rightarrow 0$ as $u \rightarrow \infty$

注记: 如果放松 " $K \equiv -c, c > 0$ " 为 " $K < 0$ ", 是存在 E^3 中曲面

而具有 $K < 0$ 的, 比如 elliptic hyperboloid ^{of one sheet}. 但是, 1964年, Efimov 证明 E^3 中不存在 $K \leq \delta < 0$, 对某数 δ , 的曲面! 这是 Cohn-Vossen 的一个猜想。(1936).

N. V. Efimov, Appearance of Singularities on surfaces of negative curvature, Math. Sb. 106 (1964). AMS translations. Series 2, vol 66, 1968, 154-190.

§9 Willmore 能量

Willmore, Note on embedded surfaces, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N.S.) 11B (1965) 493-496 (Dedicated to Prof Professor Octav Mayer on his 70-th birthday)

Willmore在其1965年的文章中对 Gauss-Bonnet 定理作如下看法: 令 M 为一个光滑的、紧致无边、可定向曲面, $f: M \rightarrow E^3$ 为 M 到 3 维欧氏空间的光滑嵌入. 则 $f(M)$ 上有 E^3 上欧氏度量的诱导的“度量结构”(节为余形式). 则对 $\forall p \in f(M)$, 有高斯曲率 $K(p)$. 在这种情况下, Gauss-Bonnet 定理说

$$\frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} K dV = \chi(M)$$

上式的左端不依赖于嵌入 $f: M \rightarrow E^3$ 的选取.

在这种观点下, Willmore 考虑如果把上式左端的高斯曲率替换成平均曲率平方 H^2 , 所得量

$$\tau(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} H^2 dV$$

是否是 M 的一个拓扑量?

注意平均曲率 H 依赖于嵌入 f 的选取, $\tau(f)$ 一般不是一个拓扑量. 因此, 我们定义

$$\tau(M) := \inf_{f \in \mathcal{F}} \tau(f)$$

其中下确界是在 $\mathcal{F} = \{ \text{所有 } M \rightarrow E^3 \text{ 的光滑嵌入} \}$ 上. 则 $\tau(M)$ 就是 M 的一个拓扑不变量了.

问题: $\tau(M)$ 和 $\chi(M)$ 有什么关系呢?

定理 1 (Willmore, 1965) 设 M 为亏格 $g=0$ 的曲面. (C^∞ , closed, orientable)

则有 $\tau(M) = \chi(M)$

且 $\tau(f) = 2$ 当且仅当 $f(M)$ 是一个球面.

证明. 设 $f(M)$ 每点处的主曲率为 k_1, k_2 . 则有

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\text{由于 } H^2 = \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^2 = \frac{1}{4}(k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2)$$

$$= k_1 k_2 + \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1 k_2 + k_2^2)$$

$$= K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2$$

我们有

$$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} H^2 dV = \frac{1}{2\pi} \int_{f(M)} K dV + \frac{1}{8\pi} \int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV$$

$$\stackrel{\text{Gauss-Bonnet}}{=} \chi(M) + \frac{1}{8\pi} \int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV$$

因此有 $\tau(f) \geq \chi(M), \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

当 $\tau(f) = \chi(M)$, 则有 $\int_{f(M)} (k_1 - k_2)^2 dV = 0 \Rightarrow k_1^p = k_2^p, \quad \forall p \in f(M)$

从而 $f(M)$ 为全脐点曲面, 从而只能是球面; 此时 $\chi(M) = 2, g = 0$.

+ (260')

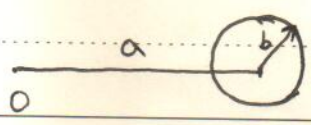
自然地一个问题: 如果曲面 M 的亏格 $g \geq 1$, $\tau(M)$ 是否有更好的下界?

对亏格 $g=1$ 的曲面, 即环面, Willmore 考虑了如下特别的一类嵌入:

嵌入: 环面 $T: f: T \rightarrow E^3$

设 $f(T)$ 由如下坐标给出: $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v \\ y = (a + b \cos u) \sin v \\ z = b \sin u \end{cases}$$



$$0 < b < a,$$

实际上,我们有对任一光滑、紧致、可定向曲面 M , 有

$$\chi(M) \geq 2, \quad "=" \text{ 成立} \Leftrightarrow M \text{ 是球面.}$$

定理 9.2 设 M 为 E^3 中紧致曲面, 则有

$$\frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV \geq 2$$

且等式成立当且仅当 M 为球面。

证明: 利用恒等式 $H^2 = K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2$, 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV \geq \frac{1}{2\pi} \int_M K dV = \chi(M) = 2 - 2g.$$

这估计太少了。实际上, 记 $M_+ = \{p \in M : K(p) \geq 0\}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV \geq \frac{1}{2\pi} \int_M K dV = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{M_+} K dV + \int_{M \setminus M_+} K dV \right)$$

其中负项 $\int_{M \setminus M_+} K dV$ 可避免。我们改进如下

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dV &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{M_+} H^2 dV = \frac{1}{2\pi} \int_{M_+} \left(K + \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \right) dV \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{M_+} K dV. \end{aligned}$$

但 $\int_{M_+} K dV$ 有好的估计吗? 这由如下引理回答并可完成证明。

引理: 设 M 为 E^3 中紧致曲面。设 $M_+ = \{p \in M : K(p) \geq 0\}$

$$\text{则有 } \int_{M_+} K dV \geq 4\pi.$$

证明: ~~记 $d\sigma$ 为 S^2 上面积元~~, 回忆 $K dV = d\sigma$.

~~记 D 为~~ 考查 M_+ 在 Gauss 映射下之像 $D = g(M_+) \subset S^2$.

$$\text{记 } D_1 = \{e \in D : \#(g^{-1}(e) \cap M_+) = 1\}$$

$$D_2 = D \setminus D_1$$

$$\text{则 } \int_{M_+} K dV = \int_{g^{-1}(D_1) \cap M_+} K dV + \int_{g^{-1}(D_2) \cap M_+} K dV$$

$$\geq \int_{D_1} d\sigma + 2 \int_{D_2} d\sigma$$

这里一个重要的观察是 $\int_{D_2} d\sigma \geq \int_{S^2 \setminus D} d\sigma$!

Claim: $-S^2 \setminus D \subseteq D_2$.

考查函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

$P \mapsto \langle r(P), e \rangle$, 其中 e 为固定单位向量, r 为位置向量.

则 f 为光滑函数. 由紧性知 $\exists P_1, P_2 \in M$ 使 f 在 P_1, P_2 分别达到极大、极小值.

故对 M 上过 P_i 点的任意弧长参数曲线 $r(s)$, $r(0) = P_i$ 有

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(r(s)) = \langle \dot{r}(0), e \rangle = 0$$

由曲线的任意性知 e 与 P_1, P_2 点处单位法向量 $n(P_1), n(P_2)$ 平行

在 P_1 处取曲面片, 参数化为 $r = r(u, v)$, 则 f 在 P_1 达极大值

推出 $\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{uv} & f_{vv} \end{pmatrix}$ 稳定, 即 $\begin{pmatrix} \langle r_{uu}, e \rangle & \langle r_{uv}, e \rangle \\ \langle r_{uv}, e \rangle & \langle r_{vv}, e \rangle \end{pmatrix}$ 稳定

因为 $e = n(P_1)$ or $-n(P_1)$, 知在 P_1 处, $\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 稳定,

从而 $\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \geq 0$. 亦即 $P_1 \in M_+$, 类似地有 $P_2 \in M_+$.

由此, 若 $e \in S^2 \setminus D$, 则 $e \neq g(P_1), e \neq g(P_2)$. 故而有

$$e = -g(P_1) = -g(P_2)$$

因此 $-e \in D_2$. 这就证明了 $-S^2 \setminus D \subseteq D_2$. \square

应用 Claim, 我们有 $\int_{M^+} k dv \geq \int_{D_1} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma \geq \int_{D_1} d\sigma + \int_{D_2} d\sigma + \int_{S^2 \setminus D} d\sigma$

$$= \int_{S^2} d\sigma = 4\pi.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_M H^2 dv \geq \frac{1}{2\pi} \int_{M^+} H^2 dv \geq \frac{1}{2\pi} \int_{M^+} k dv \geq 4\pi, \quad " = " \text{ 或 } \Rightarrow k_1 = k_2 \text{ on } M_+$$

由于 M 紧致, 知 $\exists p_0 \in M$ 使 $K(p_0) > 0$

这说明在 M_+ 上, 有 $k_1 = k_2 > 0$

若 $M_- \neq \emptyset$, 则 M_- 上 $k_1 k_2 < 0$, 即 k_1, k_2 反号.

则 k_1, k_2 中有一个函数在 M_+ 上 > 0 , 在 M_- 上 < 0 . 与主曲率函数连续性矛盾.

故 $M_- = \emptyset$.

这就是说 M 是全脐点曲面, 故 M 是球面 \square .

则有 $r_u = (-b \sin u \cos u, -b \sin u \sin u, b \cos u)$

$$r_v = (-(a+b \cos u) \sin u, (a+b \cos u) \cos u, 0)$$

进而计算 $E = \langle r_u, r_u \rangle = b^2 \sin^2 u \cos^2 u + b^2 \sin^2 u \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$
 $= b^2$

$$F = \langle r_u, r_v \rangle = b(a+b \cos u) \sin u \sin u \cos u - b(a+b \cos u) \sin u \sin u \cos u$$

 $= 0$

$$G = \langle r_v, r_v \rangle = (a+b \cos u)^2 \sin^2 u + (a+b \cos u)^2 \cos^2 u$$

 $= (a+b \cos u)^2$

由此可计算

$$r_u \wedge r_v = (-(a+b \cos u) b \cos u \cos u, -(a+b \cos u) b \cos u \sin u, -(a+b \cos u) b \sin u)$$

$$|r_u \wedge r_v|^2 = (a+b \cos u)^2 b^2$$

也即 $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} = (-\cos u \cos u, -\cos u \sin u, -\sin u)$

$$\Rightarrow n_u = (\sin u \cos u, \sin u \sin u, -\cos u)$$

$$n_v = (\cos u \sin u, -\cos u \cos u, 0)$$

进而 $L = -\langle r_u, n_u \rangle = -[-b \sin^2 u \cos^2 u - b \sin^2 u \sin^2 u - b \cos^2 u]$
 $= b$

$$M = -\langle r_u, n_v \rangle = -[-b \sin u \cos u \sin u \cos u + b \sin u \cos u \sin u \cos u]$$

 $= 0$

$$N = -\langle r_v, n_v \rangle = -[-(a+b \cos u) \sin^2 u \cos u - (a+b \cos u) \cos^2 u \cos u]$$

 $= (a+b \cos u) \cos u$

则平均曲率 $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}$$

我们计算 $H = \frac{1}{2} \frac{b(a+b\cos u)^2 + b^2(a+b\cos u)\cos u}{b^2(a+b\cos u)^2}$

(262)

$$= \frac{1}{2} \frac{(a+b\cos u) + b\cos u}{b(a+b\cos u)} = \frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)}$$

回到 $\tau(f)$ 的计算. 我们有.

$$\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H^2 \cdot \sqrt{EG-F^2} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a+2b\cos u}{2b(a+b\cos u)} \right)^2 \cdot b(a+b\cos u) \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a+2b\cos u)^2}{4b(a+b\cos u)} \, du \, dv$$

由 $\frac{1}{2} \frac{b}{a} = c$, 则 $\frac{1}{4c}$

$$\tau(f_{a,b}) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1+2c\cos u)^2}{c(1+c\cos u)} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{4c} \int_0^{2\pi} \frac{(1+2c\cos u)^2}{1+c\cos u} \, du$$

$$= \frac{1}{4c} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1-c^2}}$$

观察到当 $c \rightarrow 0$ (即环面很扁时) $\tau(f_{a,b}) \rightarrow \infty$

当 $c \rightarrow 1$ (即环面很粗时) $\tau(f_{a,b}) \rightarrow \infty$.

所以当 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\tau(f_{a,b})$ 取最小值 π .

"It seems reasonable to interpret $\tau(f)$ as a measure of the "niceness" of the shape of the surface $f(M)$, and to argue heuristically that a small value of $\tau(f)$ corresponds to a simple

shape for ~~an~~ $f(M)$. This suggests that $f_{a,b}$ with (26)

$b/a = 1/\sqrt{2}$ gives the nicest shape for an embedded torus.

However, whether or not $\tau(T) = \pi$ remains an open question.

The problem for surfaces of genus $g \geq 2$ remains unsolved."

Willmore 猜想: the problem of determining the best torus among all.

实际上 Willmore energy 作为一种描述弹性薄膜的 elastic or bending energy 能量早在 1810s 就由 Sophie Germain 研究过. 在数学上, Willmore energy 被 Blaschke 和 Thomsen 于 1920s 在研究共形映射 (conformal Gauss map) 时研究过.

Marques, Neves, Min-max theory and the Willmore Conjecture, Ann. of Math. (2) 179 (2014), no. 3, 683-782

上面得到的环面 $f_{a,b}(T)$, $b/a = 1/\sqrt{2}$ 是一种非常特殊的曲面, 在任何研究中已经出现过. 实际上, 存在单位球面

$$S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

上的球极投影 (即从 S^3 去掉一点到 \mathbb{R}^3) 把 Clifford 环面

$$\hat{\Sigma} = S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

映射 (onto) $f_{1/\sqrt{2}, 1}(T)$.

定理 (Marques - Neves), \mathbb{R}^3 中每一个具有正亏格的嵌入紧致曲面满足

$$\tau(M) \geq \pi.$$

等号成立当且仅当 M 为 Clifford 环面的球极投影像.

Willmore conjecture 之研究 激发了很多领域数学之研究
包括 共形几何, PDEs, 代数几何, 几何测度论等.

一个很重要的看法是 Willmore energy 与 S^3 中 紧致
曲面之面积注有密切关系。Clifford torus 是 S^3 的一个 极
小曲面.

1991. 生物学家 Bensimon and Mutz 在研究 ~~薄~~
薄膜时 借助显微镜实验上验证了 Willmore conjecture.

Observation of toroidal vesicles, Phys. Rev. A, 43(1991)
4525-4527.

"自然而真实的"

Willmore
Conjecture