1.0.1 习题

1. 设 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$ 为四个向量。证明下列恒等式：

(i) (Lagrange恒等式)

$$\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_3 \rangle & \langle v_1, v_4 \rangle \\ \langle v_2, v_3 \rangle & \langle v_2, v_4 \rangle \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3,$$
$$(v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \rangle v_1.$$

2. 设 v_1, v_2, v_3 为 $\mathbb{R}$ 上的连续可微向量值函数。记 $v_i' := \frac{d}{dt} v_i$. 证明下列性质：

(i)

$$\frac{d}{dt}(v_1 \wedge v_2) = v_1' \wedge v_2 + v_1 \wedge v_2'.$$

(ii)

$$\frac{d}{dt}(v_1, v_2, v_3) = (v_1', v_2, v_3) + (v_1, v_2', v_3) + (v_1, v_2, v_3').$$

3. 设 v 为 $\mathbb{R}$ 上的二阶连续可微的处处非零向量值函数。证明如下性质：

(i) $v(t)$ 方向不变当且仅当 $v(t) \wedge v'(t) \equiv 0$.

(ii) 如果 $v(t)$ 与某一个固定方向垂直，那么 $(v(t), v'(t), v''(t)) = 0$.
反之，如果 $(v(t), v'(t), v''(t)) = 0$ ，且处处有 $v(t) \wedge v'(t) \neq 0$ ，那么 $v(t)$ 必定与某一固定方向垂直。