

## 1.0.2 习题

1. 设  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  为一光滑函数。设  $v_p$  为  $\mathbb{R}^3$  在  $p$  点处的切向量。证明对任意光滑参数曲线

$$r: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \epsilon > 0,$$

若有  $r(0) = p$ ,  $r'(0) = v_p$ , 则微分一形式  $df$  满足

$$df(v_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(r(t)).$$

2. 设  $\phi \in \Omega_1(\mathbb{R}^3)$  为光滑微分一形式。证明  $d(d\phi) = 0$ .

3. 如果我们把 1-形式、2-形式分别一一对应到向量场如下:

$$\sum_i f_i dx^i \xleftrightarrow{(1)} \sum_i f_i U_i \xleftrightarrow{(2)} f_1 dx^2 \wedge dx^3 - f_2 dx^1 \wedge dx^3 + f_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

则对任意  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  有

$$\text{grad } f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} U_i \xleftrightarrow{(1)} \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = df.$$

对任意  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ , 回忆其散度为

$$\text{div } X = \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \frac{\partial X^2}{\partial x^2} + \frac{\partial X^3}{\partial x^3}$$

其旋度为

$$\text{curl } X = \left( \frac{\partial X^3}{\partial x^2} - \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \right) U_1 + \left( \frac{\partial X^1}{\partial x^3} - \frac{\partial X^3}{\partial x^1} \right) U_2 + \left( \frac{\partial X^2}{\partial x^1} - \frac{\partial X^1}{\partial x^2} \right) U_3.$$

证明如下图表交换.

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{curl}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ \uparrow \text{Id} & & \uparrow (1) & & \uparrow (2) & & \uparrow \\ \Omega_0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega_1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega_2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega_3(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

4. 设  $a, b$  为两个非零实数。考虑下面的平面参数曲线:

- (1)  $r(t) = (t, at^2), t \in \mathbb{R}.$
- (2)  $r(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in \mathbb{R}.$
- (3)  $r(t) = (a \cosh t, b \sinh t), t \in \mathbb{R}.$

试回答如下问题。

- (i) 判断它们是否为正则曲线。
- (ii) 求它们的 Frenet 标架。
- (iii) 求它们的带符号曲率。

---

5. 用复值函数表一平面正则曲线  $z : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} : t \mapsto z(t)$ 。则其在  $z(t)$  点处切向量可表成复数  $z'(t)$ 。我们记  $z^*$  为复数  $z$  的共轭,  $\text{Im}(z)$  为复数  $z$  的虚部。

(i) 记  $\tau(t)$  为  $z'(t)$  的辐角。证明

$$\tau = \frac{1}{2i} \ln \frac{z'}{(z')^*}.$$

(ii) 令  $s = s(t)$  为该曲线的弧长参数。证明该曲线的带符号曲率满足

$$\kappa(s) = \frac{d\tau}{ds}.$$

(iii) 对一般参数  $t$ , 证明该曲线的带符号曲率为

$$\kappa(t) = \frac{\text{Im}((z'(t))^* z''(t))}{|z'(t)|^3}$$

(iv) 设该平面正则曲线在  $\mathbb{R}^2$  的欧氏坐标下表为  $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ 。从 (iii) 推导其带符号曲率  $\kappa(t)$  的表达式。

(v) 设该平面正则曲线在  $\mathbb{R}^2$  的极坐标下表为  $t \mapsto (f(t), t) \in \mathbb{R}^2$ 。从 (iii) 推导其带符号曲率  $\kappa(t)$  的表达式。