

1.0.3 习题

1. 设 $r(t)$, $t \in \mathbb{R}$ 为一空间正则曲线。设其 $\ddot{r}(s) \neq 0$, 这里 s 为其弧长参数。

(i) 证明其曲率为

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

(ii) 证明其挠率为

$$\tau(t) = \frac{(r'(t), r''(t), r'''(t))}{|r'(t) \wedge r''(t)|^2}.$$

(iii) 设 $r(t) = (t, at^2, bt^3)$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 。计算其在 $t = 0$ 处的曲率和挠率。(注意曲率和挠率如何依赖于 a, b 的取值。)

2. 设 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 是一条正则参数曲线, s 是它的弧长参数。假定曲线 C 的曲率 $\kappa > 0$ 是常数值, 挠率 $\tau(s) > 0$ 。记

$$\{\mathbf{r}(s); \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$$

为沿着曲线 C 的 Frenet 标架场。考虑新曲线

$$\overline{C} : \bar{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n}(s).$$

求曲线 $\overline{C}$ 的曲率和挠率, 以及它的 Frenet 标架场。