

1.0.4 习题

1. 对 $t \in [0, \ell]$, 设

$$A = A(t) = \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & 0 \\ -k_1(t) & 0 & -k_2(t) \\ 0 & k_2(t) & 0 \end{pmatrix} = (a_j^i(t)).$$

其中 $k_1 > 0, k_2$ 为两个光滑函数。设 $r_j : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3, j = 1, 2, 3$ 为满足如下方程组的三个向量值函数：

$$\frac{dr_j}{dt} = \sum_{i=1}^3 a_j^i r_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

其中 $r_1(0), r_2(0), r_3(0)$ 为具有右手系定向的标准正交标架。

(i) 证明对于任意 $t \in [0, \ell]$, 标架 $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ 标准正交。

(ii) 定义曲线 $r^* : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^3$ 如下：对任意 $t \in [0, \ell]$,

$$r^*(t) := r_0 + \int_0^t r_1(t) dt,$$

其中 $r_0 \in \mathbb{R}^3$ 为一给定点。求曲线 r^* 的切向量、主法向量和副法向量，以及曲率和挠率。

2. 设 $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ 是 3 维欧氏空间中的正则曲线，曲率函数 $\kappa(s) > 0, \forall s \in I, s$ 为弧长参数。

(i) 证明存在向量场 $\omega : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ 满足

$$\dot{\mathbf{t}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s)$$

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{n}(s)$$

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{b}(s).$$

向量场 $\omega(s)$ 称为曲线的角速度场。

(ii) 证明 $\omega(s) \equiv \omega_0, \forall s \in I$ 当且仅当曲线 $\alpha(s)$ 是圆柱螺旋线。

3. 设 $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset E^3$ 为一正则曲面片。设映射 r 为微分同胚映射。

(i) 定义 M 上的向量场、光滑向量场。

(ii) 定义 M 上的一形式、光滑一形式。

(iii) 设 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 M 上光滑函数，即 $f \circ r$ 为光滑函数。定义一形式 df 。

(iv) 记 $u^1, u^2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 M 上的两个坐标函数。证明 M 上任意一个一形式 ϕ 均可表为

$$\phi = f_1 du^1 + f_2 du^2,$$

其中 $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ 。

(v) 设 $I = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} du^i \otimes du^j$ 为该曲面的第一基本形式。证明 I 不依赖于曲面参数的选取。

4. 设 $r(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ 是单位球面 $\mathbb{S}^2$ 的一个参数表示。

(i) 证明映射 $\sigma : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ 使得 $(u, v) = \sigma(\theta, \varphi)$ 满足

$$u = \ln \tan \frac{\theta}{2}, \quad v = \varphi$$

为一容许的参数变换。

(ii) 写出 $\mathbb{S}^2$ 的新参数表示 $r(u, v)$, 并求其相应的第一基本形式。

(iii) 如果 $\mathbb{S}^2$ 上的曲线 C 在每一点处均与经线 (即 $\varphi = \text{常数}$ 的曲线) 方向的夹角为固定角, 则称 C 为斜航线. 考虑 $\mathbb{S}^2$ 上一个三角形 Δ , 其三条边均为斜航线且 Δ 内不含南北极点. 证明该三角形 Δ 的内角和为 180 度。

5. 设 $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset E^3$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$ 为一正则曲面片。设 e_1, e_2 为一点 $p = r(u_0, v_0)$ 处的一对标准正交切向量。证明存在参数变换 $\sigma : \bar{D} \rightarrow D$, $(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto (u, v)$ 使得 $\bar{r} := r \circ \sigma$ 满足

$$\bar{r}_{\bar{u}}|_p = e_1, \quad \bar{r}_{\bar{v}}|_p = e_2.$$

6. 求椭球面

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\},$$

其中 $a, b, c > 0$, 的高斯曲率函数。