

1.0.10 习题

1. 设 $M : r = r(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面且高斯曲率 K 处处非零。假设 M 没有脐点。记 M 的两个主曲率函数为 κ_1, κ_2 , 平均曲率为 H 。设

$$\{r; e_1, e_2, e_3\}$$

为 M 的一个正交活动标架, 其中 e_1, e_2 是对应于 κ_1, κ_2 的两个主方向。回忆 M 的平行曲面为

$$M_\lambda : r_\lambda(u, v) = r(u, v) + \lambda e_3(u, v),$$

其中 $\lambda > 0$ 是充分小的数。

- (i) 求 M 相应于上述正交活动标架的五个一形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$ 。
- (ii) 在平行曲面上取正交活动标架 $\{r_\lambda, e_1, e_2, e_3\}$, 求其相应的五个一形式。
- (iii) 利用上述正交活动标架, 计算平行曲面 M_λ 的主曲率、平均曲率和高斯曲率。

2. 设 $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为一个没有脐点且高斯曲率为 0 的正则曲面片。用正交活动标架法证明该曲面片为直纹面。(提示: 推广常主曲率曲面分类的证明。)