1.0.11 习题

1. 回忆悬链面有如下的参数表示

$$r(u,v)=(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,u)\,,\quad u\in\mathbb{R},\quad v\in(0,2\pi).$$

(i) 求悬链面上经线 (即 u-线) 和纬线 (即 v-线) 的测地曲率；经线和纬线是否为测地线?

(ii) 设曲线 $C:r(s)=r(u(s),v(s))$ 为悬链面上一条测地线，与经线的夹角为 $\theta(s)$（定向为从 r_u 到 $r'(s)$，即若有 $(r_u,r'(s),\mathbf{n})>0$，则 $\theta(s)>0$ ）. 试判断 $\cosh u(s)\sin\theta(s)$ 沿着曲线 C 是否为常数，并说明理由。

(iii) 给定一般的旋转面

$$r(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))\,,\ f>0,\quad u\in\mathbb{R},\quad v\in(0,2\pi).$$

考虑其上一条测地线 $C:r(s)=r(u(s),v(s))$ ，与经线的夹角为 $\theta(s)$ 。试判断

$$f(u(s))\sin\theta(s)$$

沿着曲线 C 是否为常数，并说明理由。

2. 设 M 为 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面，$\alpha(s)=r(u(s),v(s))$ 为 M 上一条正则曲线，s 为弧长参数。记 $\mathbf{t}(s)=\alpha'(s)$ 为曲线的切向量，$\mathbf{h}(s)\in T_{\alpha(s)}M$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处与 $\mathbf{t}(s)$ 正交的单位切向量，且 $\{\mathbf{t}(s),\mathbf{h}(s)\}$ 与曲面的定向相同，即 $\mathbf{t}(s)\wedge\mathbf{h}(s)=\mathbf{n}(s)$，其中 $\mathbf{n}(s)$ 为曲面 M 在 $\alpha(s)$ 处的单位法向量。定义曲线 $\alpha(s)\subset M$ 在 $\alpha(s)$ 处的测地挠率为

$$\tau_g(s)=\left\langle\frac{d\mathbf{n}}{ds},\mathbf{h}(s)\right\rangle.$$

(i) 证明

$$\frac{d}{d}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{h}\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k_g&k_n\\ -k_g&0&\tau_g\\ -k_n&-\tau_g&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{h}\\ \mathbf{n}\end{pmatrix}.$$

(ii) 记 $\mathcal{W}_s:T_{\alpha(s)}M\to T_{\alpha(s)}M$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处 Weingarten 变换，说明

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\mathcal{W}_s\left(\frac{d\alpha}{ds}\right).$$

(iii) 设 $\kappa_1(s),\kappa_2(s)$ 为曲面在 $\alpha(s)$ 点处的主曲率，$e_1(s),e_2(s)$ 为对应的单位正交主方向，且 $\{e_1,e_2,\mathbf{n}\}$ 为正定向 (即 $\mathbf{n}=e_1\wedge e_2$)。若 e_1 与 $\mathbf{t}$ 的夹角为 φ（定向为从 e_1 到 $\mathbf{t}$，即若有 $(e_1,\mathbf{t},\mathbf{n})>0$，则 $\varphi>0$ ），证明

$$\tau_g=(\kappa_1-\kappa_2)\cos\varphi\sin\varphi.$$

(iv) 证明曲线 $\alpha(s)$ 为曲面 M 上的曲率线当且仅当其测地挠率 τ_g 恒为零。

(v) 设 $e_1(s),\mathbf{t}(s)$ 为沿着曲线 $\alpha(s)$ 的光滑切向量场，定义如 (iii) 。证明

$$\left\langle\frac{D\mathbf{t}}{ds},\mathbf{n}\wedge\mathbf{t}\right\rangle-\left\langle\frac{De_1}{ds},\mathbf{n}\wedge e_1\right\rangle=\frac{d\varphi}{ds}.$$