### 1.0.12 习题

1. 设 $r = r(\rho, \theta)$ 为正则曲面 $M$ 在 $p \in M$ 点附近的测地极坐标系，其中 $\rho < \varepsilon_0, \varepsilon_0$ 充分小. 对 $t \in (0, \varepsilon_0)$ , 记 $S_t(p)$ 为以 $p$ 点为心、半径为 $t$ 的测地圆；其包围的区域 $B_t(p)$ 称为半径为 $t$ 的测地圆盘。设 $L_t, A_t$ 分别为 $S_t(p)$ 的周长和 $B_t(p)$ 的面积。

(i) 证明当 $t$ 很小时，有下式成立

$$\begin{aligned} L_t =& 2\pi t - \frac{\pi}{3} t^3 K(p) + o(t^4), \\ A_t =& \pi t^2 - \frac{\pi}{12} t^4 K(p) + o(t^4), \end{aligned}$$

以及

$$4\pi A_t - L_t^2 = \pi^2 t^4 K(p) + o(t^4),$$

其中 $K(p)$ 为曲面在 $p$ 点处的高斯曲率，$o(t^4)$ 为无穷小量，即 $\lim_{t\to 0} o(t^4)/t^4 = 0$. （提示：考虑 $\sqrt{G}$ 的泰勒展开。）

(ii) 若曲面 $M$ 具有常高斯曲率 $K \equiv 0, 1,$ or $-1$，请分别计算如下函数

$$f(t) := 4\pi A_t - L_t^2 - K A_t^2$$

的取值。

2. 考查 $\mathbb{E}^3$ 中的曲面 $M : \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 | x^2 + y^2 = z.\}$

(i) 给出其作为旋转面的一个参数表示。

(ii) 求 $M$ 与平面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 | z = a^2\}$ 相交所得曲线的测地曲率，其中 $a \in \mathbb{R}$ 。

(iii) 记区域 $R_a := M \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 | 0 \le z \le a^2\}$ 。利用 (ii) 和高斯博内公式计算

$$\int_{R_a} K dV.$$

(iv) 计算极限 $\lim_{a\to\infty} \int_{R_a} K dV$ 。