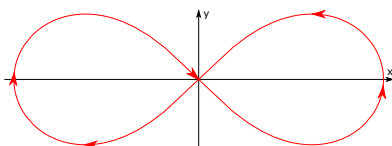


1.0.13 习题

1. 考虑如图所示平面闭曲线 $\gamma: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$ 为给定常数。将该曲线按如图所示方向参数化。



求

$$\int_{\gamma} \kappa(s) ds,$$

其中 s 为弧长参数, κ 为其带符号曲率。(提示: 利用曲线的对称性和带符号曲率的相关性质。)

2. 设 M 是同胚于平面 \mathbb{R}^2 的一个极小曲面。证明 M 上任意两条测地线至多有一个交点。

3. 考察 \mathbb{E}^3 中的悬链面 $M: \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 | x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ 。

(i) 给出其作为旋转面的一个参数表示, 并求其高斯曲率。

(ii) 证明 M 与 xy -平面相交所得曲线弧长参数化后是 M 上的一条闭测地线。

(iii) 证明 M 只有唯一的一条闭测地线。

4. 设 M 是 \mathbb{E}^3 中一紧致无边、连通、可定向曲面。设 M 不同胚于球面。证明 M 必然包含一个椭圆点和一个双曲点。