
1.0.5 习题

1. 如果正则曲面 M 上的一条正则曲线的每点处的切向量均为该点处的主方向, 则称该曲线为 M 上的一条**曲率线**. 设 M_1, M_2 为 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面, 相交于一条正则曲线 $C: r = r(s)$, 以 $s \in I \subset \mathbb{R}$ 为弧长参数.

- (i) 证明 C 为曲面 M_1 的曲率线当且仅当 $\frac{d\mathbf{n}_1}{ds}$ 与 $\dot{r}(s)$ 在 $\mathbb{E}^3$ 中平行。
- (ii) 设 C 为曲面 M_1 的曲率线, 证明: C 也为曲面 M_2 的曲率线当且仅当 M_1, M_2 的单位法向量 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 的夹角沿着 C 为常数。
- (iii) 设 C 在 M_1, M_2 上的法曲率分别为 κ_1, κ_2 , 且 M_1, M_2 的单位法向量 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 沿着 C 的夹角为 $\pi/2$. 证明曲线 C 在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲率 κ 满足

$$\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2.$$