1.0.6 习题

1. 设 $r=r(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{E}^3$ 中的正则曲面片。若其第一基本形式可写作

$$I=A^2(u,v)\,(du\otimes du+dv\otimes dv)\,,$$

其中 $A:D\to\mathbb{R}$ 为光滑函数且 $A>0$， 则我们称其参数 (u,v) 为**等温参数**.

(i) 对任意等温参数的正则曲面 $r=r(u,v)$, 证明 $r_{uu}+r_{vv}$ 与该曲面的法向量平行。

(ii) 对任意等温参数的正则曲面 $r=r(u,v)$, 证明该曲面的平均曲率 $H=0$ 当且仅当 $r_{uu}+r_{vv}=0$.

2. 考察 $\mathbb{E}^3$ 中如下两个正则曲面片:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u,v)=&(\sinh v\sin u,-\sinh v\cos u,u),\\ \mathbf{y}(u,v)=&(\cosh v\cos u,\cosh v\sin u,v),\end{aligned}$$

其中 $0<u<\pi,\ -\infty<v<+\infty$.

(i) 证明参数 (u,v) 为这两个曲面片的等温参数.

(ii) 对任意实数 t , 考察如下单参数族正则曲面片

$$M_t:(u,v)\mapsto(\cos t)\mathbf{x}(u,v)+(\sin t)\mathbf{y}(u,v).$$

证明这族曲面两两等距且均为极小曲面。

3. Enneper 曲面是一个可如下定义在整个 $\mathbb{R}^2$ 上的正则曲面:

$$r(u,v)=\left(-u+\frac{u^3}{3}-uv^2,v-\frac{v^3}{3}+vu^2,u^2-v^2\right),\ (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

(i) 证明 (u,v) 为 Enneper 曲面的等温参数。

(ii) 证明 Enneper 曲面为极小曲面。

(iii) 求 Enneper 曲面上的曲率线，并证明曲率线为平面曲线。

(iv) 求 Enneper 曲面上每点处法曲率为 0 的切方向。

(v) 设 g 为从 Enneper 曲面出发的高斯映射。证明映射 $g\circ r:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}^2\subset\mathbb{E}^3$ 为球极投影映射。

4. 考察 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面片 $r=r(u,v):=(u,v,\ln\cos u-\ln\cos v)$ ，其中 $(u,v)\in D:=(-\pi/2,\pi/2)\times(-\pi/2,\pi/2)\subset\mathbb{R}^2$。

(i) 证明该曲面为极小曲面。

(ii) 求该曲面的高斯曲率。

(iii) 试判断是否存在具有正高斯曲率的极小曲面。

5. 设 $M:r=r(u,v)$, $(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ 为 $\mathbb{E}^3$ 中正则曲面且高斯曲率 K 处处非零，$\mathbf{n}=\mathbf{n}(u,v)$ 为 M 的单位法向量。定义 M 的平行曲面为

$$M_\lambda:\quad r_\lambda(u,v)=r(u,v)+\lambda\mathbf{n}(u,v),$$

其中 $\lambda > 0$ 是充分小的数。

(i) 证明对充分小的 λ , M_λ 是正则曲面。

(ii) 证明曲面 M 和 M_λ 在对应点的切平面平行。

(iii) 设 $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ 为 $p = r(u,v) \in M$ 处的主曲率，对应的主方向为 $e_1, e_2 \in T_pM$。证明 e_1, e_2 也为 $p_\lambda = p + \lambda\mathbf{n}(u,v)$ 处的主方向，对应的主曲率为

$$\kappa_{\lambda,i}(p_\lambda) = \frac{\kappa_i(p)}{1 - \lambda\kappa_i(p)}, \quad i = 1, 2$$

(iv) 证明曲面 M_λ 和 M 的平均曲率和高斯曲率满足如下关系：

$$K_\lambda = \frac{K}{1 - 2H\lambda + K\lambda^2}, \qquad H_\lambda = \frac{H - \lambda K}{1 - 2H\lambda + K\lambda^2}$$

(v) 通过前述讨论, 试总结一种从常平均曲率正则曲面出发构造常高斯曲率正则曲面的方法。