

1.0.7 习题

1. 给定正则曲线 $\rho = \rho(s)$ ，其中 s 是弧长参数。设其曲率 $\kappa(s)$ 满足 $0 < \kappa(s) < \frac{1}{a}$ ，这里 $a > 0$ 是一实数。记 $\mathbf{n}(s)$ 和 $\mathbf{b}(s)$ 分别为该曲线的主法向量和副法向量。考查曲面

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s, \varphi) = \rho(s) + a\mathbf{n}(s) \cos \varphi + a\mathbf{b}(s) \sin \varphi,$$

这里 $\varphi \in (0, 2\pi)$ 。

- (1) 证明曲面 S 正则。
- (2) 判断 $\mathbf{r}_s(s, \varphi)$ 和 $\mathbf{r}_\varphi(s, \varphi)$ 是否为曲面该点处的主方向并说明理由。
- (3) 当曲线 $\rho = \rho(s)$ 为平面曲线时，求曲面的平均曲率并判断曲面是否为极小曲面。
- (4) 当曲线 $\rho = \rho(s)$ 为平面曲线时，求曲面的椭圆点、双曲点、抛物点。
- (5) 当曲线 $\rho = \rho(s)$ 为平面曲线时，求曲面在双曲点处和抛物点处的渐近方向。

2. 设 $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为一个正则曲面片，设其第一、第二基本形式为

$$I = Edu \otimes du + F(du \otimes dv + dv \otimes du) + Gdv \otimes dv, \quad (1.1)$$

$$II = Ldu \otimes du + M(du \otimes dv + dv \otimes du) + Ndv \otimes dv, \quad (1.2)$$

其中 $E, F, G, L, M, N : D \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑函数。

- (i) 若任意坐标曲线 $u = \text{常数}$ 或 $v = \text{常数}$ 都是曲率线，则称该参数化为曲面片的一个正交曲率线网。设改曲面片没有脐点，证明参数化为正交曲率线网的充要条件是 $F = M = 0$ 。
- (ii) 若任意坐标曲线 $u = \text{常数}$ 或 $v = \text{常数}$ 都是渐近线，则称该参数化为曲面片的一个渐近线网。证明参数化是渐近线网的充要条件是 $L = N = 0$ 。

3. 设 $r : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ 为一个正则曲面片。

- (i) 证明任给 $(u_0, v_0) \in D$ ，都存在其一个邻域 U ，使得 U 有参数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 使得 $r = r(\bar{u}, \bar{v})$ 满足 $\langle r_{\bar{u}}, r_{\bar{v}} \rangle = 0$ 在 U 上处处成立。
- (ii) 证明对 $(u_0, v_0) \in D$ ，若 $r(u_0, v_0)$ 不是脐点，则总存在其一个邻域 U ，使得 U 有参数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 其相应的曲面参数化为正交曲率线网。
- (iii) 设曲面片为全脐点曲面。证明对任给 $(u_0, v_0) \in D$ ，都存在其一个邻域 U ，使得 U 有参数 $(\bar{u}, \bar{v})$ 其相应的曲面参数化为正交曲率线网。